



# Simulation des écoulements compressibles turbulents sur parois rugueuses

Frédéric Valentin, Patrick Le Tallec, Bijan Mohammadi

## ► To cite this version:

Frédéric Valentin, Patrick Le Tallec, Bijan Mohammadi. Simulation des écoulements compressibles turbulents sur parois rugueuses. [Rapport de recherche] RR-3108, INRIA. 1997. inria-00073583

**HAL Id: inria-00073583**

**<https://inria.hal.science/inria-00073583>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Simulation des écoulements compressibles  
turbulents sur parois rugueuses***

Frédéric Valentin , Patrick Le Tallec et Bijan Mohammadi

**N° 3108**

Fevrier 1997

\_\_\_\_\_ THÈME 4 \_\_\_\_\_

 ***apport  
de recherche***  
\_\_\_\_\_



# Simulation des écoulements compressibles turbulents sur parois rugueuses

Frédéric Valentin <sup>\*</sup>, Patrick Le Tallec <sup>†</sup> et Bijan Mohammadi <sup>‡</sup>

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes

Projet M3N

Rapport de recherche n ° 3108 — Fevrier 1997 — 61 pages

**Résumé :** On s'intéresse à l'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine (MDD) pour des écoulements compressibles turbulents sur des domaines rugueux. On valide l'application d'un modèle bicouche à ce type de problème, par des essais numériques venant de l'industrie. Ensuite on vérifie la possibilité de l'application du MDD, en étudiant la validité de ses hypothèses de base.

**Mots-clé :** méthode de décomposition de domaine, méthode des volumes finis, méthode d'éléments finis, lois de paroi, turbulence, modèle bicouche

*(Abstract: pto)*

\* The author was supported by Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) - Brazil - e-mail: [frederic.valentin@inria.fr](mailto:frederic.valentin@inria.fr)

<sup>†</sup> e-mail: [LeTallec@inria.fr](mailto:LeTallec@inria.fr)

<sup>‡</sup> e-mail: [Mohammadi@inria.fr](mailto:Mohammadi@inria.fr)

# Simulation of compressible turbulent flows on rough walls

**Abstract:** The application of a domain decomposition method (MDD) for compressible turbulent flows on rough boundaries is presented. The application of two layer model for this type of problem is validated through numerical tests originated from industry. At the end, the possibility of the application of MDD is verified, through the study of the validity of the basics hypothesis.

**Key-words:** domain decomposition method, finite volume method, finite element method, wall law, turbulent flow, two layer model

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Modèle de turbulence</b>	<b>5</b>
2.1	Équations de Reynolds compressibles . . . . .	5
2.2	Modèle à bas Reynolds . . . . .	7
2.3	Lois de paroi . . . . .	8
2.4	Adimensionnement des variables . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Résolution Numérique</b>	<b>10</b>
3.1	Équation sous forme conservative . . . . .	10
3.2	Conditions aux limites . . . . .	13
3.3	Formulation Variationnelle . . . . .	13
3.4	Discretisation spatiale du problème . . . . .	13
3.5	Discretisation temporelle du problème . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Loi de paroi homogénéisée</b>	<b>17</b>
4.1	Stratégie de l'approche . . . . .	17
4.2	Hypothèses . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Résultats et discussion</b>	<b>20</b>
5.1	Plaque plane . . . . .	21
5.2	Plaque rugueuse - Cas 1 . . . . .	22
5.3	Plaque rugueuse - Cas 2 . . . . .	23
5.4	Plaque rugueuse - Cas 3 . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>26</b>

# 1 Introduction

L'objectif de ce travail est la validation de différents modèles de turbulence bicouche pour l'étude numérique d'un écoulement turbulent au-dessus d'une paroi rugueuse et la vérification des hypothèses à la base des méthodes de décomposition de domaine basées sur la théorie de l'homogénéisation. L'intérêt de ces modèles est d'ôter la sous-couche visqueuse du domaine de calcul et de simuler l'influence des rugosités par le biais d'une loi de paroi appliquée à une frontière plane fictive.

Initialement proposée par Carrau-Le Tallec [1] pour des écoulements compressibles laminaire et turbulent, la méthodologie a donnée de bons résultats pour le cas laminaire. Cependant les résultats numériques pour des écoulements turbulents n'ont pas satisfait les hypothèses de base de la méthode, pour le choix d'un modèle de turbulence algébrique.

Dans ce travail, on utilise un modèle de turbulence bicouche, adapté aux écoulements sur parois rugueuses. On montre à partir de plusieurs cas-tests, que le modèle donne des résultats cohérents et que les hypothèses de base de l'approche Carrau restent fondamentalement valables pour ces écoulements turbulents. Une analyse de l'erreur de la méthode est par ailleurs effectuée dans Pironneau et al. [7].

Les cas-tests traités ont été donnés par le CESTA/CEA. Nous considérons trois domaines, caractérisés par différentes tailles de rugosités. D'abord, nous étudions l'influence de leur forme sur la couche limite turbulente et ensuite nous validons les hypothèses de base des techniques d'homogénéisation.

Dans la deuxième partie de ce travail, on présente les équations qui gouvernent l'écoulement, ainsi que le modèle de turbulence choisi. Les méthodes numériques employées sont présentées dans la troisième partie. La quatrième partie est consacrée à la définition d'un cadre mathématique pour la méthode de décomposition de domaine et à la formulation des hypothèses. Dans la cinquième partie, on présente l'analyse des résultats numériques concernant les trois cas étudiés. Nos conclusions figurent dans la sixième partie de ce rapport.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un contrat avec le CEA/CESTA. Je remercie le CEA/CESTA pour son important partenariat financier.

## 2 Modèle de turbulence

Le modèle utilise les équations de Navier-Stokes moyennées, que l'on ferme par un modèle  $k-\epsilon$  fondé sur le concept de viscosité turbulente (concept de Boussinesq). Pour prendre en compte correctement la paroi, une approche bicouche a été choisie à proximité de la paroi.

### 2.1 Équations de Reynolds compressibles

Les équations de Reynolds (équations de Navier-Stokes moyennées + équations  $k-\epsilon$ ) sont données par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \left( p + \frac{2}{3} k \right) \mathbf{I} \right) - \nabla \cdot (\mathbf{S}_t) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \left( E + p + \frac{2}{3} k \right) \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot (\mathbf{S}_t : \mathbf{u} + \mathbf{q}_t) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} k) - \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) - S_k = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \epsilon) - \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) - S_\epsilon = 0.$$

Les lois d'état qui ferment le système s'écrivent :

$$\begin{aligned} E &= \rho \left( e + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 \right) + \rho k = C_v T + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + \rho k, \\ p &= (\gamma - 1) \rho T. \end{aligned}$$

Les définitions sont les suivantes :

- $\rho$  : densité,
- $\mathbf{u} = (u, v)$  : champ de vitesse moyennée,
- $p$  : pression statique,



- $T$ : température,
- $e$ : énergie interne,
- $E$ : énergie totale,
- $k$ : énergie turbulente,
- $\epsilon$ : dissipation de l'énergie turbulente,
- $\mathbf{S}_t = (\mu + \mu_t) \mathbf{D}$ : tenseur de Reynolds + tenseur de contraintes turbulentes,
  - $\mathbf{D} = \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}$
  - $\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}$ : viscosité turbulente,
  - $\mu$ : viscosité moléculaire, donnée par la Loi de Sutherland

$$\mu(T) = \mu_\infty \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^{1/2} \left( \frac{T_\infty + 110}{T + 110} \right)$$

, l'indice  $\infty$  renvoie aux quantités de référence définies sur l'écoulement infini,

- $\mathbf{q}_t = (\lambda + \lambda_t) \nabla T$ : flux de chaleur
  - $\lambda = \mu \frac{C_p}{Pr} = \mu \frac{\gamma}{Pr}$ : coefficient de conductivité moléculaire,
  - $\lambda_t = \mu_t \frac{C_p}{Pr_t} = \mu_t \frac{\gamma}{Pr_t}$ : coefficient de conductivité turbulente,
- $P = \left( \mu_t \mathbf{D} - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} \right) : \nabla \mathbf{u}$ : terme de production,
- $S_k = P - \rho \epsilon$ : terme de production + terme de destruction pour l'équation en  $k$ ,
- $S_\epsilon = \frac{\epsilon}{k} [C_{\epsilon 1} P - C_{\epsilon 2} \rho \epsilon]$ : terme de production + terme de destruction pour l'équation en  $\epsilon$ .

Enfin la valeur des constantes est donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma &= 1.4 : \text{constante adiabatique,} \\ Pr &= 0.72 : \text{nombre de Prandtl,} \\ Pr_t &= 0.9 : \text{nombre de Prandtl turbulent,} \\ C_\mu &= 0.09, \quad C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.8333, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3. \end{aligned}$$

**Remarque 1:**

On utilise  $C_{\epsilon 2} = 1.8333$ , au lieu de la valeur classique  $C_{\epsilon 2} = 1.92$  (voir [5]).

**Remarque 2:**

On remplace dans le modèle  $k - \epsilon$  le terme de production

$$P = \left( \mu_t \mathbf{D} - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I} \right) : \nabla \mathbf{u}$$

par le terme sans coefficients diagonaux

$$P = \mu_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \rho k \nabla \cdot \mathbf{u}$$

pour réduire l'effet de la viscosité turbulente dans les régions de compressions-détente où les termes diagonaux de  $\mathbf{D}$  dominent (voir [6]).

## 2.2 Modèle à bas Reynolds

L'idée est de résoudre dans la zone à bas nombre de Reynolds un modèle de turbulence basé sur une seule équation. Cette équation est couplée automatiquement au modèle  $k - \epsilon$ , grâce à l'introduction d'une définition adéquate du nombre de Reynolds local  $y^+$ . La stratégie consiste à résoudre les équations  $k$  et  $\epsilon$  pour des valeurs de  $y^+ \geq 200$ , et une équation de transport pour la quantité  $k$  si  $y^+ < 200$ .

Nous avons par définition :

$$y^+ = \frac{y \sqrt{k \rho \rho_w}}{\mu_w}.$$

Cette définition de  $y^+$  ne fait pas intervenir le frottement à la paroi mais la racine de  $k$ .

Si  $y^+ < 200$ , on utilise l'équation suivante :

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} k) - \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) - P - Dissi = 0 \quad ,$$

où :

$$\rho \epsilon = Dissi = \rho \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_\epsilon}, \quad \mu_t = C_\mu \rho \sqrt{k} l_\mu,$$

où  $y$  désigne la distance du point à la paroi et l'indice  $w$  la valeur à la paroi en ce point de projection. Par construction, ce point de projection est le point de paroi le plus proche du point considéré.

Les longueurs de mélange sont définies de façon à reproduire les bons profils des quantités (vitesse, pression,  $k$  et  $\epsilon$ ) dans la couche limite turbulente :

$$l_\mu = \kappa C_\mu^{-3/4} y \left( 1 - \exp \left( \frac{-y^+}{70} \right) \right),$$

$$l_\epsilon = \kappa C_\mu^{-3/4} y \left( 1 - \exp \left( \frac{-y^+}{2\kappa C_\mu^{-3/4}} \right) \right),$$

où  $\kappa = 0.41$ .

### 2.3 Lois de paroi

Le but des lois de parois est d'éviter le calcul des détails de l'écoulement proche de la paroi et donc d'éviter l'utilisation locale d'un modèle à bas Reynolds. Alors on s'est intéressé à la possibilité de leur application à des domaines rugueux. On a choisie d'implémenter la loi de Reichard, qui reste valable dans les régions linéaire et logarithmique. On peut décrire la loi de Reichard de la façon suivante : soit  $(\vec{s}, \vec{n})$  la base orthogonale à la paroi, alors la lois s'écrit

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{s} &= u_\tau f(u_\tau) \end{cases}$$

où  $u_\tau^2$  désigne la force de frottement à la paroi et  $f$  est donnée par

$$f(u_\tau) = 2.5 \log(1 + \kappa y^+) + 7.8 \left( 1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+ e^{-0.33y^+}}{11} \right),$$

avec  $\kappa = 0.41$  et  $y^+ = \frac{\rho y u_\tau}{\mu}$  (différent par rapport à  $y^+$  bicouche). L'objectif est de calculer  $u_\tau$ , par une méthode de Newton par exemple, pour ensuite calculer  $k$  et  $\epsilon$  à la paroi par les expressions :

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \epsilon = \frac{u_\tau^2}{\kappa \delta},$$

où  $\delta$  est la distance entre la paroi et le domaine fictif où est écrit la loi.

## 2.4 Adimensionnement des variables

Dans la partie numérique on résout les équations sans dimension, où les variables sont adimensionnées de la façon suivante : si  $L_0$  désigne une longueur caractéristique et  $\mathbf{x}$  la variable d'espace, la nouvelle variable sans dimension  $\mathbf{x}^*$ , s'écrit  $\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L_0}$ .

De la même façon, on note :

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_0},$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0},$$

$$p^* = \frac{p}{\rho_0 U_0^2 \gamma},$$

$$t^* = \frac{t U_0}{L_0},$$

$$k^* = \frac{k}{U_0^2},$$

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon L_0}{U_0^3},$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_0},$$

$$\mu_t^* = \frac{\mu_t}{\rho_0 U_0 L_0}.$$

En utilisant les variables adimensionnées, on définit les coefficients de friction ( $C_f$ ) et pression ( $C_p$ ) à la paroi par :

$$C_f = \overrightarrow{\mathbf{s}} \cdot \sigma_t \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}}, \quad C_p = 2 \times p^*.$$

Les résultats numériques (partie 5) sont basés sur ces définitions, sauf mention du contraire, et les quantités  $U_0, \rho_0, \dots$  étant définies comme les valeurs à l'infini de l'écoulement décrit par le fichier-profil donné par le CESTA.

### 3 Résolution Numérique

#### 3.1 Équation sous forme conservative

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Gamma$  sa frontière "suffisamment régulière". On définit la variable  $W = (W_r, W_t)$ , avec  $W_r : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^4$  et  $W_t : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , par

$$W_r = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix},$$

$$W_t = \begin{pmatrix} \rho k \\ Diss \end{pmatrix},$$

où  $Diss = \rho\epsilon$ , si  $y^+ \geq 200$ ,  $Diss = 0$  sinon.

Par la suite, on utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} - \mu_{Tk} &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}, \\ - \mu_{T\epsilon} &= \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}, \\ - \tau_{xx} &= (\mu + \mu_t) \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ - \tau_{yy} &= (\mu + \mu_t) \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ - \tau_{xy} &= \tau_{yx} = (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ - \lambda_T &= \lambda + \lambda_t. \end{aligned}$$

En définissant le flux  $F = (F_r, F_t)$ ,  $G = (G_r, G_t)$  et  $H = (H_r, H_t)$  par

$$F_r : W(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, \quad F_t : W(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

$$G_r : W(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, \quad G_t : W(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

$$H_r : W(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad H_t : W(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

où  $F_r, G_r, H_r$  sont les termes de flux convectif, diffusif et de source pour les équations de Navier-Stokes et  $F_t, G_t, H_t$  sont les termes de flux convectif, diffusif

et de source pour les équations de turbulence, alors le problème classique en forme conservative s'écrit :

Trouver  $W$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial W_r}{\partial t} + \nabla \cdot F_r(W_r) - \nabla \cdot G_r(W, \nabla W) & = 0 \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial W_t}{\partial t} + \nabla \cdot F_t(W) - \nabla \cdot G_t(W, \nabla W) - H_r(W, \nabla W) & = 0 \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ W(\mathbf{x}, 0) & = W_0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Omega, \\ W(\mathbf{x}, t) & = W|_{\Gamma}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (1)$$

Les notations sont les suivantes :

a) Opérateur d'ordre 0 (source) : on a

$$H_r = (0, 0, 0, 0)^T$$

Par ailleurs, si  $y^+ \geq 200$ , on a

$$H_t = \left[ \begin{array}{c} P - \rho \epsilon \\ \frac{\epsilon}{k} [C_{\epsilon 1} P - C_{\epsilon 2} \rho \epsilon] \end{array} \right]$$

sinon, on pose

$$H_t = \left[ \begin{array}{c} P - Dissi \\ 0 \end{array} \right]$$

b) Opérateur d'ordre 1 (convection) :

$$\frac{\partial W_r}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} \\ \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} \\ \frac{\partial E}{\partial t} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial W_t}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (\rho k)}{\partial t} \\ \frac{\partial (Diss)}{\partial t} \end{bmatrix}$$

$$\nabla . F_r = \frac{\partial F_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{ry}}{\partial y},$$

$$F_{rx} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_t \\ \rho uv \\ (E + p_t) u \end{bmatrix}, \quad F_{ry} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p_t \\ (E + p_t) v \end{bmatrix}$$

$$\nabla . F_t = \frac{\partial F_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{ty}}{\partial y},$$

$$F_{tx} = \begin{bmatrix} \rho k u \\ Diss \ u \end{bmatrix}, \quad F_{ty} = \begin{bmatrix} \rho k v \\ Diss \ v \end{bmatrix}$$

c) Opérateur d'ordre 2 (diffusion):

$$\nabla . G_r = \frac{\partial G_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial G_{ry}}{\partial y},$$

$$G_{rx} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad G_{ry} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + \lambda_T \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\nabla . G_t = \frac{\partial G_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial G_{ty}}{\partial y},$$

$$G_{tx} = \begin{bmatrix} \mu_{Tk} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \mu_{T\epsilon} \frac{\partial (Diss \setminus \rho)}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad G_{ty} = \begin{bmatrix} \mu_{Tk} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \mu_{T\epsilon} \frac{\partial (Diss \setminus \rho)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

### 3.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites employées sont les suivantes :

- Frontière solide (paroi) : condition de non-glissement pour la vitesse ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) (remplacée par la condition de Reichard dans le cas de l'utilisation d'une loi de paroi), pour la température condition de Neumann homogène (condition adiabatique,  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ ), condition de Dirichlet pour  $k$  et  $\epsilon$ ,
- à l'entrée : condition de Dirichlet. Profil de vitesse, densité,  $k$  et  $\epsilon$  données par le CESTA/CEA,
- à la sortie et à la frontière infinie : condition de flux imposé calculée à partir de la valeur interne de  $W$  et de sa valeur  $W_\infty$  par une technique de caractéristique, du type Steger-Warming (voir [10] et [6]).

### 3.3 Formulation Variationnelle

Soit le sous-espace de  $(H^1(\Omega))^6$  défini par :

$$G = \left\{ V \in (H^1(\Omega))^6 \mid V|_\Gamma = W_\Gamma(\mathbf{x}) \right\}.$$

La formulation faible continue associée au problème (1) s'écrit :

Trouver  $W \in G$  tel que  $\forall \widehat{W}_r, \widehat{W}_t \in H^1(\Omega)$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial W_r}{\partial t} \widehat{W}_r - \int_{\Omega} F_r \nabla \widehat{W}_r + \int_{\Gamma} F_r \cdot \vec{n} \widehat{W}_r + \int_{\Omega} G_r \nabla \widehat{W}_r - \int_{\Gamma} G_r \cdot \vec{n} \widehat{W}_r & = 0, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial W_t}{\partial t} \widehat{W}_t - \int_{\Omega} F_t \nabla \widehat{W}_t + \int_{\Gamma} F_t \cdot \vec{n} \widehat{W}_t + \int_{\Omega} G_t \nabla \widehat{W}_t - \int_{\Gamma} G_t \cdot \vec{n} \widehat{W}_t - \int_{\Omega} H_t \widehat{W}_t & = 0, \\ W(\mathbf{x}, 0) & = W_0(\mathbf{x}), \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$

### 3.4 Discrétisation spatiale du problème

Soit  $T_h$  une partition conforme de  $\Omega_h$  en éléments triangulaires, avec un contour polygonal  $\Gamma_h$ , telle que



$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{nt} T_i, T_i \in T_h.$$

On définit maintenant une autre partition de  $\Omega_h$ , duale de la première (voir figure 1), de façon à avoir :

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{ns} C_i$$

où les  $C_i$  sont appelés volumes de contrôles.

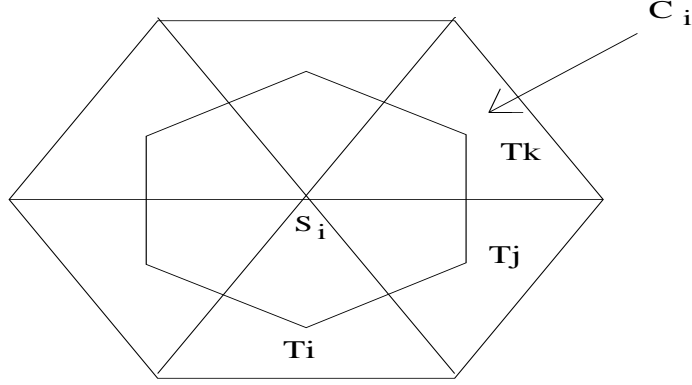


FIG. 1 - *définition du volume de contrôle.*

L'approximation de la solution est faite dans l'espace de dimension finie suivant:

$$\vartheta_h = \left\{ \mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega), \mathbf{v}_h|_T \in P_1, \forall T \in T_h \right\},$$

et on définit un espace auxiliaire :

$$\zeta_h = \left\{ \mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega), \mathbf{v}_h|_{C_i} = v_i = \text{const}, i = 1, ns \right\},$$

où  $ns$  est le nombre de sommets du maillage et  $P_1$  est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

Les fonctions de base des espaces choisis, sont les suivantes (respectivement pour  $\vartheta_h$  et  $\zeta_h$ ):

$$N_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2)$$

et

$$\chi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in C_i \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases} \quad (3)$$

Ecrivons une formulation du type Petrov-Galerkin du problème variationnel initial, la fonction (3) étant prise comme fonction test pour la partie Euler du problème. Après une intégration par parties on obtient le problème discret, et en choisissant comme fonctions test les fonctions de base elles-mêmes, on obtient:

$$\begin{cases} \int_{C_i} \frac{\partial W_{rh}}{\partial t} + \int_{\partial C_i} F_{rh} \cdot \vec{n} + \int_{\cup \Delta (i \in \Delta)} G_{rh} \nabla N_i - \int_{\partial \Gamma_h} G_{rh} \cdot \vec{n} N_i & = 0, \\ \int_{C_i} \frac{\partial W_{th}}{\partial t} + \int_{\partial C_i} F_{th} \cdot \vec{n} + \int_{\cup \Delta (i \in \Delta)} G_{th} \nabla N_i - \int_{\partial \Gamma_h} G_{th} \cdot \vec{n} N_i - \int_{\cup \Delta (i \in \Delta)} H_{th} N_i & = 0, \\ , \forall i = 1, \dots, ns \end{cases} \quad (4)$$

Pour la suite, on écrit  $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_\infty$ , où  $\Gamma_p$  est la frontière solide (paroi) et  $\Gamma_\infty$  la frontière à l'infini.

Nous examinons maintenant le traitement numérique de chacun des termes de la formulation discrète (4).

. Termes convectifs :

$$\begin{cases} \int_{\partial C_i} F_{rh} \cdot \vec{n} & = \sum_{j \in V(i)} \int_{\partial C_{ij}} F_{rh} \cdot \vec{n}_{ij} + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} F_{rh} \cdot \vec{n}_i + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_p} F_{rh} \cdot \vec{n}_i \\ \int_{\partial C_i} F_{th} \cdot \vec{n} & = \sum_{j \in V(i)} \int_{\partial C_{ij}} F_{th} \cdot \vec{n}_{ij} + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} F_{th} \cdot \vec{n}_i + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_p} F_{th} \cdot \vec{n}_i \end{cases}$$

Ces termes sont calculés à l'aide de la technique des Volumes-Finis décentrée par le biais d'un solveur de Riemann du type Roe [9]. Une extension au second ordre est obtenue avec une approche du type MUSCL (voir [11] et [5] pour plus de détails). Pour préserver la positivité des quantités  $\rho k$  et  $\rho \epsilon$ , on utilise la variante proposée dans [4]. Les conditions aux limites sur  $\Gamma_p$  et  $\Gamma_\infty$  sont prises en compte dans cette partie.

. Termes Diffusifs : ils s'écrivent simplement

$$\begin{cases} \int_T G_{rh} \nabla N_i \\ \int_T G_{th} \nabla N_i \end{cases}$$

On remarque que, le fait d'utiliser des interpolations linéaires conduit à

$$\nabla v(\mathbf{x})|_T = \sum_{i \in T} v(\mathbf{x}_i) \nabla N_i(\mathbf{x}) = \text{const.}$$

. Terme de source: ce terme

$$\int_T H_{th} N_i$$

est traité de façon explicite.

### 3.5 Discrétisation temporelle du problème

En nous référant à [5], nous intégrons la relation :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = F(W)$$

à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta explicite à quatre pas de temps

$$\begin{aligned} W^0 &= W^n, \\ W^k &= W^0 + \alpha_k \Delta t F(W^{k-1}), \quad k = 1, \dots, 4, \\ W^{n+1} &= W^4, \end{aligned}$$

avec  $\alpha_1 = 0.11$ ,  $\alpha_2 = 0.2766$ ,  $\alpha_3 = 0.5$ ,  $\alpha_4 = 1.0$ .

Notre pas de temps local (dépendant du sommets  $s_i$ ), est déterminé par la condition de CFL locale

$$\Delta t(s_i) = \min \left( \frac{\Delta x}{|\mathbf{u}| + c}, \frac{\rho P_r \Delta x^2}{2(\mu + \mu_t)} \right).$$

## 4 Loi de paroi homogénéisée

### 4.1 Stratégie de l'approche

La modélisation proposée dans Carrau-Le Tallec ([1]) est basée sur la théorie de décomposition de domaine. Le domaine de calcul est divisé en deux régions, séparées par une frontière fictive (voir figure 2) : l'une proche de la paroi ( $y \leq \epsilon$ ) contenant les rugosités distribuées de façon périodique (problème local), et l'autre éloignée ( $y > \epsilon$ ) correspondant au problème global. Le problème consiste à coupler les deux problèmes à l'interface par le biais d'une loi de paroi de type frottement, qui assure la continuité des efforts et des vitesses, et qui sert de condition aux limites pour le problème global. Cette loi de paroi est calculée sur une cellule élémentaire,

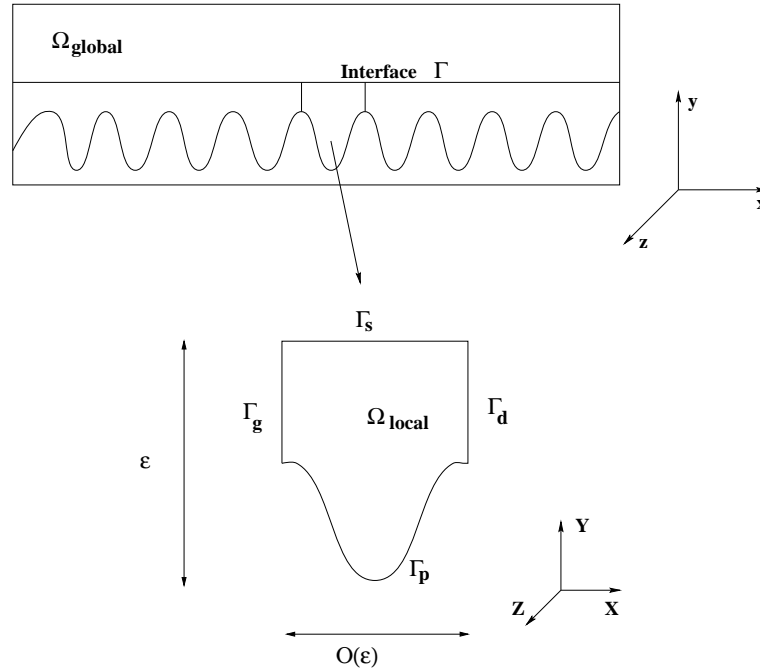


FIG. 2 - *decomposition du domaine - domaine global et local*

en utilisant une méthode d'homogénéisation. On résout les équations de Reynolds de §2.1 et §2.2 sur une cellule contenant une rugosité, avec des conditions aux limites périodiques et un flux constant imposé à l'interface supérieure. La solution de ce problème local permet de prédire une valeur moyenne  $\langle W \rangle$  sur l'interface supérieure, qui ne dépend que du flux  $F$  imposé. La loi de frottement s'écrit alors  $W|_{\Gamma_s} = (W_r, W_t)|_{\Gamma_s} = \langle W \rangle (F)$ .

## 4.2 Hypothèses

Pour pouvoir justifier l'approche précédente, certaines hypothèses doivent être satisfaites:

**Hyp1** Le paramètre  $\epsilon$  caractéristique de la rugosité doit être suffisamment petit, pour pouvoir remplacer les équations de départ par leur développement asymptotique d'ordre zéro.

**Hyp2** L'écoulement est périodique pour les variables  $X$  et  $Z$ , i.e,  $\mathbf{W}(\mathbf{x}, X, Y, Z) = \mathbf{W}(\mathbf{x}, X + 1, Y, Z + 1)$ , où  $X = \frac{x}{\epsilon}$ ,  $Y = \frac{y}{\epsilon}$  et  $Z = \frac{z}{\epsilon}$  dénote l'échelle microscopique de l'écoulement.

**Hyp3** Les contraintes et le flux à l'interface supérieure varient peu à l'échelle microscopique. Cela revient à dire que ces conditions limites ne dépendent pas de la variable  $X$ .

### Remarques :

1- Périodicité : une fois la solution stationnaire atteinte, par l'équation de la continuité, la solution doit satisfaire :

$$\text{a) } \underbrace{\int_{\Gamma_s} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds}_{\text{error per } C} = 0, \text{ puisque par l'hypothèse } \mathbf{Hyp2},$$

$$\int_{\Gamma_d} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma_g} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

b) Soit :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} T_t^d \\ T_n^d \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_d = \int_{\Gamma_d} [\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \sigma_t] \cdot \mathbf{n} ds = \begin{bmatrix} \rho u^2 \\ \rho v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tau_{xx} - \left(p + \frac{2}{3}k\right) \\ \tau_{yx} \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} T_t^g \\ T_n^g \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_g = \int_{\Gamma_g} [\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \sigma_t] \cdot \mathbf{n} ds = \begin{bmatrix} -\rho u^2 \\ -\rho v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\tau_{xx} + \left(p + \frac{2}{3}k\right) \\ -\tau_{yx} \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} T_t^s \\ T_n^s \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_s = \underbrace{\int_{\Gamma_s} [\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} ds}_{\mathbf{T}_{s1}} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\Gamma_s} -\sigma_t \cdot \mathbf{n} ds}_{\mathbf{T}_{s2}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho uv \\ \rho v^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{s1}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yy} - \left(p + \frac{2}{3}k\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{s2}}, \\
\begin{bmatrix} T_t^p \\ T_n^p \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_p = \int_{\Gamma_p} -\sigma_t \cdot \mathbf{n} ds = - \begin{bmatrix} \left[ \tau_{xx} - \left(p + \frac{2}{3}k\right) \right] n_1 + \tau_{xy} n_2 \\ \tau_{yx} n_1 + \left[ \tau_{yy} - \left(p + \frac{2}{3}k\right) \right] n_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

On définit

$$\mathbf{err}_{\text{per}}\mathbf{M} = \frac{\mathbf{T}_d + \mathbf{T}_g}{\mathbf{T}_d}.$$

Par **Hyp2**, de périodicité, on doit avoir

$$\mathbf{err}_{\text{per}}\mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

Par l'équation du mouvement, on a par ailleurs

$$\begin{aligned}
\mathbf{err}_{\text{per}}\mathbf{M} &= -\frac{\mathbf{T}_s + \mathbf{T}_p}{\mathbf{T}_d} \\
&= \underbrace{-\frac{\mathbf{T}_{s1}}{\mathbf{T}_d}}_{\substack{\text{perte} \\ \text{par} \\ \text{convection}}} \underbrace{-\frac{\mathbf{T}_{s2} + \mathbf{T}_p}{\mathbf{T}_d}}_{\substack{\text{perte} \\ \text{par} \\ \text{diffusion}}}.
\end{aligned}$$

- 3-** Les essais numériques (voir section 5) doivent montrer que, à de basses hauteurs de couplage, on trouve en même temps une bonne périodicité des variables caractéristiques et un flux qui varie peu à l'interface supérieure.

## 5 Résultats et discussion

Le but principal de cette section est de valider les hypothèses précédentes par le biais de résultats numériques. Les divers cas-tests ont été construits en variant les dimensions des rugosités (amplitude et longueur), et les derniers cas de calcul correspondent aux situations expérimentales étudiées à Poitiers.

Pour chaque cas-test, la présentation des résultats numériques et la discussion sont faites de la façon suivante :

- description du domaine et caractéristiques du maillage,
- résultats à échelle globale (iso-mach, iso-pressure, coefficient de frottement, ...), c'est-à-dire, présentation des écoulements sur tout le domaine. L'intérêt, est de présenter l'influence des rugosités à l'échelle globale (recirculation, épaissement de la couche limite turbulente, ...),
- résultats à échelle locale (figure 4). On s'intéresse à l'écoulement sur deux rugosités. D'abord est donné un aperçu des possibles recirculations en aval de rugosités à travers les iso-valeurs de  $\sqrt{\frac{2k}{3}}$ , iso-mach, iso-pressure et champ de vitesse. Ensuite on vérifie la véracité des hypothèses de base pour de basses hauteurs de couplage, en particulier pour  $y = 0.01mm$ ,  $y = 0.1mm$ ,  $y = 0.5mm$  et  $y = 1.0mm$ . L'intérêt est de prouver que le modèle est applicable à des écoulements sur des planchers avec des rugosités de faible dimension et d'établir des éventuelles limitations en fonction de la forme des rugosités. L'analyse est faite sur les résultats numériques suivants :

### Périodicité :

- a) profil des variables à gauche et à droite des rugosités,
- b) flux de masse  $err_{per} C$  sur  $\Gamma_s$  en fonction de la hauteur,
- c) conservation de la contrainte  $\sigma_t \cdot \mathbf{n}$  en  $\Gamma_g$  et  $\Gamma_d$  en fonction de la hauteur ( $err_{per} M$ ).

### Flux et contrainte à l'interface supérieure $\Gamma_s$ :

- a) profil de  $\sigma_t \cdot \mathbf{n}((g_1, g_2))$ ,  $(\mathbf{u} : \sigma_t \cdot \mathbf{n} + q_T) \cdot \mathbf{t}(q_0)$ ,  $\mu_{Tk} \nabla k \cdot \mathbf{n}(k_s)$  and  $\mu_{Tk} \nabla \epsilon \cdot \mathbf{n}(\epsilon_s)$  en fonction de la hauteur,
  - b) profil des variables sur  $\Gamma_s$  en fonction de la hauteur.
- pour le cas 3 on compare les solutions obtenues avec une approche bicouche et avec la loi de Reichard.

Le domaine de calcul est délimité par une plaque plane en amont (100 mm), suivie d'une partie rugueuse (figure 3). D'abord, nous calculons l'écoulement sur la

partie plane, avec le profil CESTA à l'entrée. Ensuite, on utilise la solution à la sortie de la plaque plane, comme profil d'entrée pour la partie rugueuse (le même pour les cinq cas-tests).

Le maillage est constitué d'éléments  $P_1$ . Pour pouvoir prendre en compte de possibles recirculations, le maillage a dû être raffiné près de la paroi, en posant le premier point à une distance de l'ordre de  $10^{-4}$ (mm).

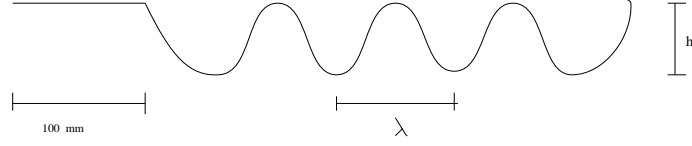


FIG. 3 - *Domaine global de calcul - plancher lisse et rugueux*

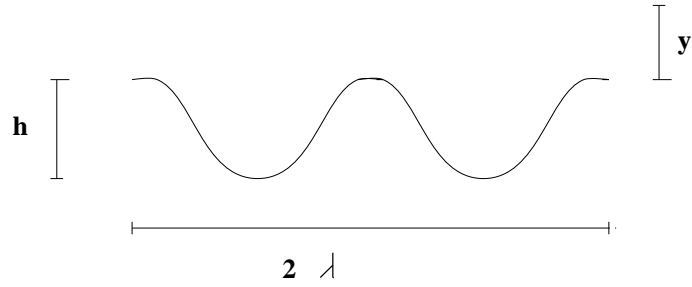


FIG. 4 - *Domaine local de calcul. Définition de la cellule, où  $y$  est la hauteur de couplage.*

## 5.1 Plaque plane

Les caractéristiques de l'écoulement sont données par :

- Mach = 2.0,
- $Re/mm = 1.25 * 10^4$ .

Le domaine est défini par :

- Domaine (mm) =  $[-100, 0] \times [0, 50]$ ,
- Nombre de sommets = 5151,
- nx = 100 raison = 1.0,
- ny = 50 raison = 1.17.



Les iso-mach sont présentés dans la figure 5. On constate que le coefficient de friction est presque constant (figure 6), puisque l'écoulement est parfaitement développé.

## 5.2 Plaque rugueuse - Cas 1

Les caractéristiques de l'écoulement sont :

- Mach = 2.0,
- $Re/mm = 1.25 * 10^4$ .

Le domaine est défini par :

- $Domaine(mm) = [0, 130] \times [0, 50]$ ,
- 10 rugosités(mm):  $(\lambda, h) = (13, 0.5)$ ,
- Nombre de sommets = 15351,
- $n_x = 300$  raison = 1.0,
- $n_y = 50$  raison = 1.16,
- premier point(mm) =  $7 * 10^{-4}$ .

Les dimensions des rugosités interfèrent sensiblement sur la couche limite (figures 8, 9 et 10). Les coefficients de friction et de pression (figure 7) montrent que l'écoulement est périodique et proche du décollement, et on observe même une recirculation de petite taille. Au niveau local (rugosités), on constate réellement cette recirculation (figure 12).

### Hyp2

On retrouve à des faibles hauteurs, une bonne périodicité pour toutes les variables (figure 13), engendrée par la géométrie de la paroi. Cependant cette périodicité n'est pas parfaite, surtout pour des hauteurs de couplage plus importantes, où on observe une perte significative de la périodicité, surtout pour la variable  $k$ . L'écoulement redevient périodique en dehors de la couche limite.

La figure 14 démontre que, à cause de la périodicité de l'écoulement, le flux de masse moyenné en  $\Gamma_s$  est faible (de l'ordre de  $10^{-3}$ ) même à des hauteurs importantes. La différence entre le cisaillement moyenné sur  $\Gamma_g$  et  $\Gamma_d$  est plus sensible à la non-périodicité parfaite, et donc on retrouve  $err_{per}M$  de l'ordre de 8% à  $y=1mm$  (figure 15). L'hypothèse reste valable, mais n'est donc pas parfaitement vérifiée.

### Hyp3

On observe (figure 16) qu'à l'échelle locale, les fonctions de flux et de cisaillement à l'interface  $\Gamma_s$  présentent de fortes variations à de faibles hauteurs de couplage. Cela est dû principalement au profil de  $k$  et de  $\nu_t$  à l'interface  $\Gamma_s$  (figure 17), où on retrouve d'importants gradient. Ces variations apparaissent à cause des grandes dimensions des rugosités, qui sont donc inadaptées pour la méthodologie employée.

### 5.3 Plaque rugueuse - Cas 2

Les caractéristiques de l'écoulement sont :

- Mach = 2.0,
- $Re/mm = 1.25 * 10^4$ .

Le domaine est défini par :

- $Domaine(mm) = [0, 120] \times [0, 50]$ ,
- 20 rugosités(mm):  $(\lambda, h) = (6, 0.5)$ ,
- Nombre de sommets = 15351,
- $n_x = 300$  raison = 1.0,
- $n_y = 50$  raison = 1.119,
- premier point(mm) =  $8 * 10^{-4}$ .

On remarque une perte de l'influence des rugosités sur la couche limite turbulente (figures 18, 19 et 22) à l'échelle globale, en raison de la diminution de leur taille. Par contre, une augmentation des recirculations en aval des rugosités (figures 20, 21 et 24) est observée. L'écoulement se présente parfaitement décollé.

#### Hyp2

A l'échelle locale, l'écoulement se montre parfaitement périodique (figure 25). Cela se reflète sur le flux moyen de masse à l'interface  $\Gamma_s$ . En effet, ce taux est proche de zéro même à des hauteurs de couplage importantes (figure 26) et, en conséquence, la différence des contraintes entre  $\Gamma_g$  et  $\Gamma_d$  est aussi proche de zéro (figure 27), ce qui reflète la parfaite périodicité. En comparant la figure 14 à la figure 26, on constate une grande différence de profil, due à la diminution de l'influence des rugosités sur l'écoulement. En effet, le profil du flux de masse (figure 26), ressemble plutôt à un profil de flux de masse sur une plaque plane, avec des pertes de masse moins importantes à l'interface supérieure. Donc, de façon plus précise que pour le cas précédent, la périodicité est respectée.

### Hyp3

A l'inverse du cas 1, on observe (figure 28) la possibilité de choisir de faibles hauteurs de couplage, en conservant toujours de faibles variation de flux et contrainte à  $\Gamma_s$  ( $y = 0.5$  mm et  $y = 1.0$  mm). En effet, on ne retrouve pas de grandes variations des variables caractéristiques à l'échelle locale (figure 29) comme pour le cas précédent.

Ce cas semble donc entrer dans le cadre mathématique qui a été établi, en respectant toutes les hypothèses associées.

## 5.4 Plaque rugueuse - Cas 3

Les caractéristiques de l'écoulement sont ici :

- Mach = 2.0,
- $Re/mm = 1.25 * 10^4$ .

Le domaine est ici beaucoup plus proche d'un cas réel :

- $\text{Domaine}(mm) = [0, 12] \times [0, 50]$ ,
- 20 rugosités(mm):  $(\lambda, h) = (0.6, 0.05)$ ,
- Nombre de sommets = 15351,
- $n_x = 300$  raison = 1.0,
- $n_y = 50$  raison = 1.115,
- premier point(mm) =  $8 * 10^{-4}$ .

En raison des très petites dimensions des rugosités, on est confronté à des difficultés pour les mailler de façon efficace (figure 40). La figure 30 nous montre que l'influence des rugosités ne se fait pas sentir à l'échelle globale. Par contre, nous avons été surpris de constater toujours des recirculations en aval des rugosités (figure 41). Cela montre que, même pour des maillages grossiers au niveau local, la méthodologie employée se montre efficace pour "capturer" les recirculations. Ensuite, on s'est intéressé à l'application de la loi de Reichard. Au départ on place la loi de paroi à la sinusoïde qui se trouve à  $\delta = 0.1$  de la paroi, donc dans la couche limite turbulente ( $y^+ \approx 30$ , zone de validité de la loi de paroi) (figures 33, 34 et 35). On ne retrouve pas les recirculations en aval des rugosités, en raison de l'utilisation d'un  $\delta \approx 2 * h$ . Donc, on essaye de retrouver les recirculations en utilisant  $\delta = 0.0005$  ( $y^+ \approx 0.01$ ) (figures 36 et 37). Mais on est en dehors de la zone de validité de la loi de paroi et à nouveau on ne retrouve pas les recirculations. On remarque les

différences d'amplitudes du  $C_f$  et du  $C_p$  par rapport à celui avec bicouche (figures 34, 35, 36 et 37). On conclut que la loi de paroi s'applique mal ici car elle ne peut pas capturer les recirculations (figures 40 et 42).

## Hyp2

Les variables caractéristiques se montrent parfaitement périodiques (figure 43). Comme dans le cas précédent, le flux de masse à l'interface  $\Gamma_s$  est proche de zéro (de l'ordre de  $10^{-4}$ ) à des hauteurs faibles (figure 44). Son profil est encore plus proche (comparé au cas 2) de celui sur plaque plane, mais toujours en raison de la périodicité engendrée par la géométrie, son taux est moins élevé surtout près de la paroi. En conséquence la différence entre le cisaillement à  $\Gamma_g$  et  $\Gamma_d$  est proche de zéro (figure 45).

En résumé, comme dans le cas 2, la périodicité est très bien retrouvée.

## Hyp3

Comme pour les cas précédents, on a la possibilité de choisir de faibles hauteurs de couplage et conserver de faibles variations de flux et contrainte à  $\Gamma_s$  (figure 46), avec l'avantage de pouvoir choisir de plus petites hauteurs ( $y = 0.1$  mm,  $y = 0.5$  mm et  $y = 1.0$  mm). La figure 47 montre les faibles gradients des variables caractéristiques à ces hauteurs.

Enfin, une dernière vérification de la périodicité de l'écoulement et du caractère négligeable des flux de masse verticaux se trouve en Table 1. D'après la nullité du flux de masse vertical, on doit avoir  $T_{s1} = 0$  et par périodicité  $T_{s2} + T_p = 0$ . Pour vérifier ces résultats, on a calculé  $T_p$  d'après les lois de conservation par la formule  $T_p = (T_{s2} + T_{s1})|_{y=0.002}$  et on a représenté à différentes valeurs de  $y$  les quantités  $\frac{T_{s2}}{T_p}$  et  $\frac{T_{s1}}{T_p} \cdot \mathbf{e}_x$ . Les deux quantités restent extrêmement proches des valeurs théoriques.

Ce cas est celui proche d'un cas réel. On vérifie donc, que la méthodologie et ses hypothèses, sont bien adaptées à la réalité du problème.

## 6 Conclusion

Le modèle de turbulence à deux couches s'est montré bien adapté à la modélisation des cas-tests proposés. Le fait que l'approche bicouche contienne une dépendance en  $y$ , n'a pas été un handicap. En effet, les bons résultats obtenus montrent que l'ambiguïté du calcul de la distance à la paroi n'a pas d'influence.

On a pu constater que les problèmes rencontrés dans [8] étaient dû principalement au choix du modèle de turbulence. Une définition appropriée de  $y^+$  conjuguée à la stratégie bicouche, nous a permis de surmonter les problèmes des grandes variations des variables turbulentes à l'échelle locale, pour des géométries proche du cas réel, et montré que cette géométrie engendre la périodicité de l'écoulement à des hauteurs de couplage significatives.

La méthode de décomposition de domaine pour les equations de Navier-Stokes nous a conduit, sous certaines hypothèses, à définir un problème local sur une rugosité avec des conditions aux limites périodiques dans la direction de l'écoulement et une condition de frottement à la frontière supérieure. Dans [7] on montre que cette technique, pour l'équation de Stokes, correspond à un développement à l'ordre un, et que l'erreur est bornée par la taille de la rugosité.

Une fois établi le cadre mathématique et ses hypothèses, on s'est intéressé à leur vérification sur les cas-tests. L'analyse des résultats numériques nous a permis les conclusions suivantes : pour des rugosités de faible dimension (cas réel) la méthodologie s'est montrée adaptée, en satisfaisant toutes les hypothèses de base. Les cas 2 et 3 rentrent dans ce cadre. Pour de rugosités plus importantes, on ne retrouve plus un flux constant (à l'échelle locale) à de faibles hauteurs de couplage. Si on rejette cette hypothèse, on renonce à la possibilité d'avoir une description macroscopique du phénomène, ce qui est en contradiction avec l'approche expérimentale de Nikuradse. Donc, la méthodologie basée sur une technique d'homogénéisation n'est pas applicable à ces cas. Le cas-test 1 entre dans ce dernier cadre. On a aussi constaté qu'on ne retrouve pas les recirculations derrière les rugosités, en utilisant la loi de paroi Reichard.

En résumé, on a montré que les hypothèses de l'approche développée par Carrau-Le Tallec pour des écoulements laminares, restent valables pour des écoulements turbulents sur des géométries proches du cas réel.

## Références

- [1] CARRAU, A., Modélisation numérique d'un écoulement sur paroi rugueuse, Thèse, Université de Bordeaux, no 808, 1992.
- [2] COUSTEIX, J., Turbulence et couche limites, Cepandues-Editions, 1989.
- [3] DURY, G., ALZIARY de ROQUEFORT, Couche limite turbulente sur paroi rugueuse en régime supersonique, Rapport du CEAT, Septembre 1995.
- [4] LARROUTUROU, B., How to preverve the mass fraction positivity when computing compressible multi-component flows, INRIA report 1080, 1989.
- [5] MOHAMMADI, B. Fluid dynamics computation with NSC2KE an user-guide - release 1.0, Rapport de recherche no 164 - INRIA, 1994.
- [6] MOHAMMADI, B., PIRONNEAU, O., Two-layer approach and compressibility corrections for hypersonic flows, to appear.
- [7] MOHAMMADI, B., PIRONNEAU, O., VALENTIN, F., Rough interfaces and wall law, Rapport de Paris VI no R95025, 1995.
- [8] MORISSET, F., Etude d'écoulements Turbulents hypersoniques sur paroi rugueuse, Thèse, Université de Bordeaux, 1995.
- [9] ROE, P.L., Approximate Riemann solvers, parameters vectors and difference schemes, J.C.P. Vol 43, 1981.
- [10] STEGER, J., WARMING, R.F., Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic with applications to finite-difference methods, J. of Comp. Phys., Vol. 27, 1978.
- [11] VAN ALBADA, G.D., VAN LEER, B., Flux vector splitting and Runge-Kutta methods for the Euler equations, ICASE 84-27, June 1984.

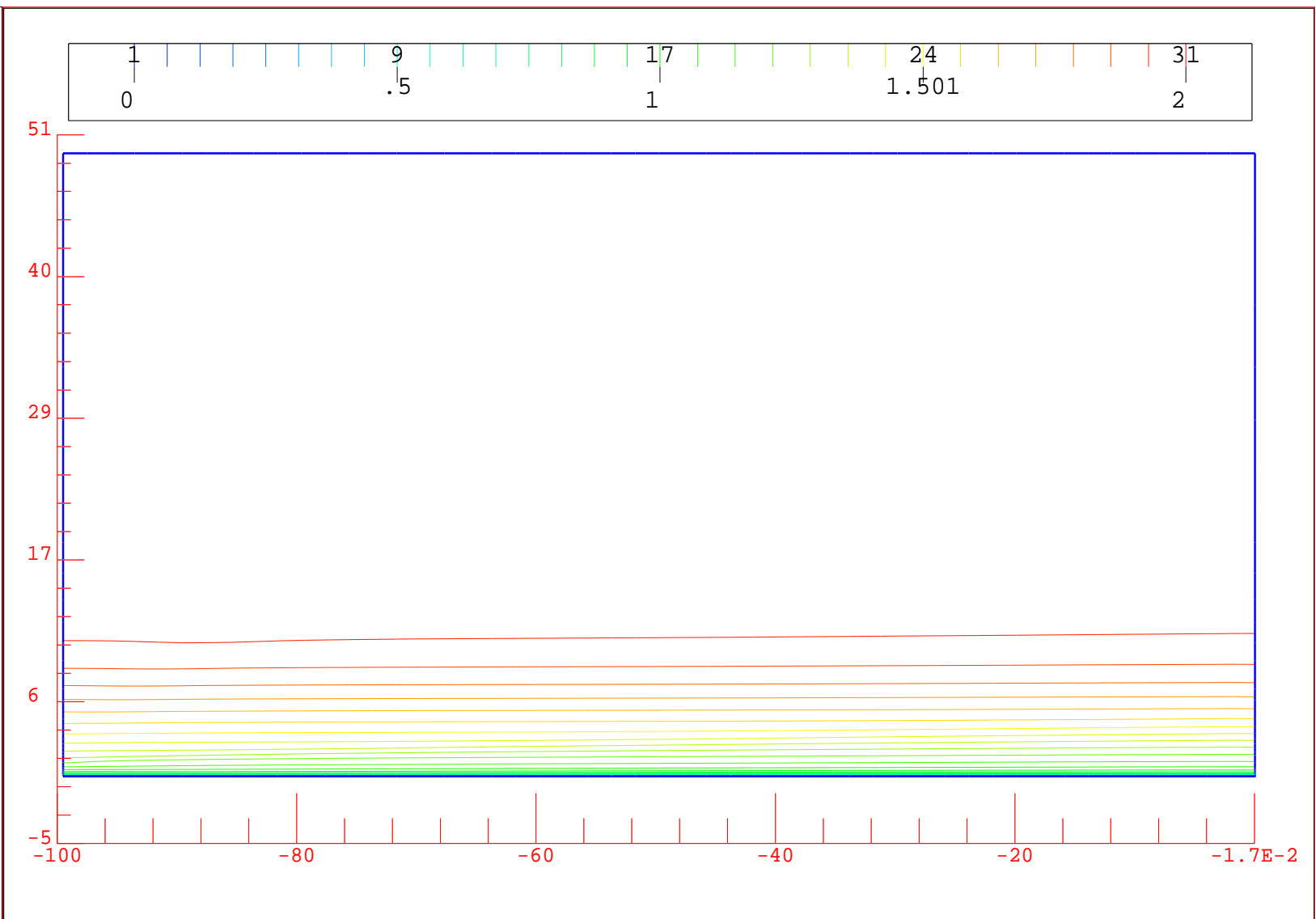
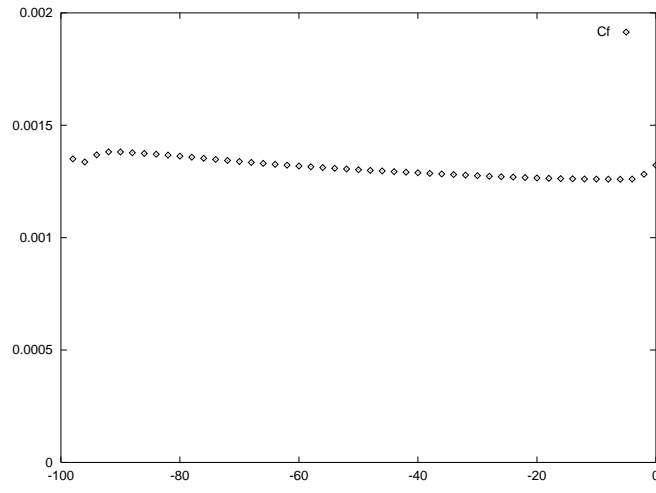
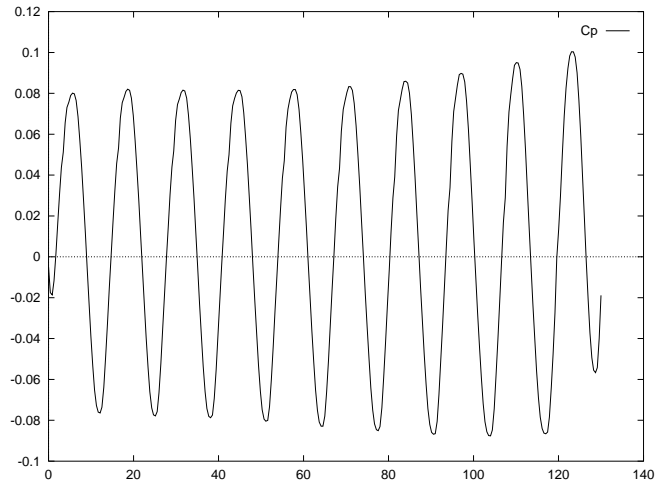
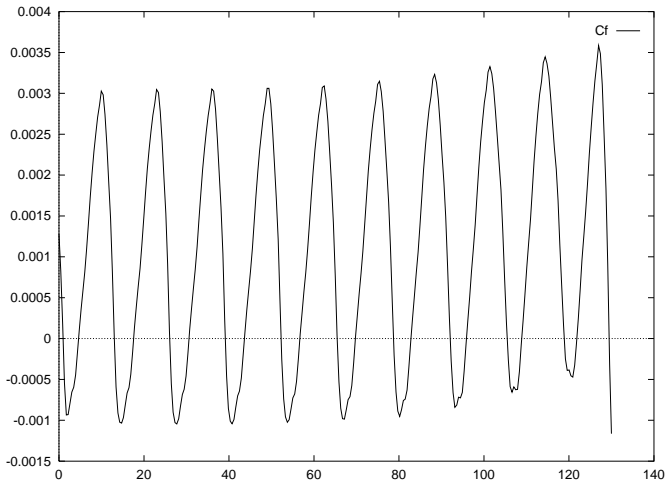


FIG. 5 - *iso-mach - plaque plane*

FIG. 6 -  $C_f$  - plaque planeFIG. 7 - Cas 1 :  $C_f$  (gauche) et  $C_p$  (droite).



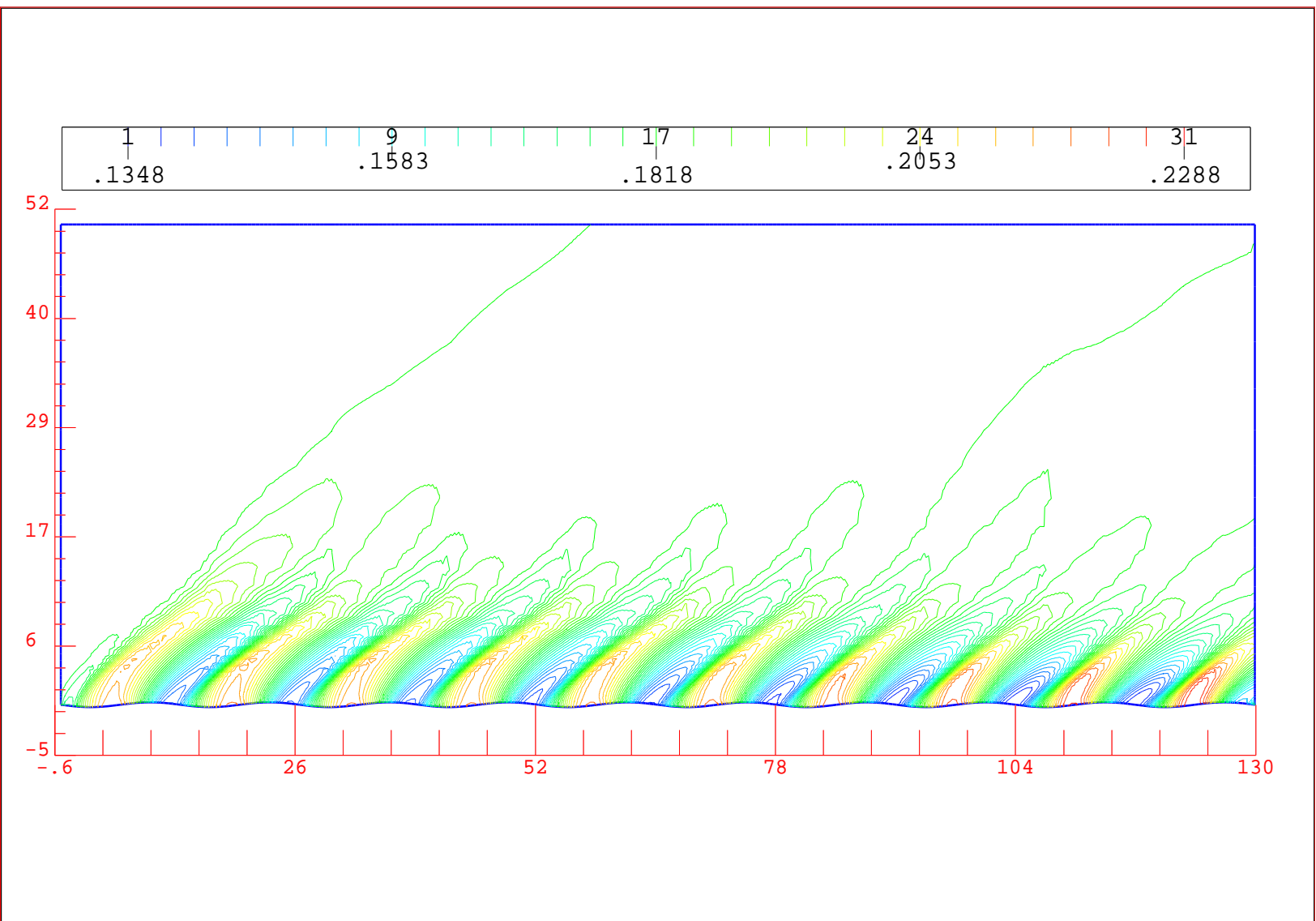


FIG. 8 - *Case 1 : iso-pressure.*

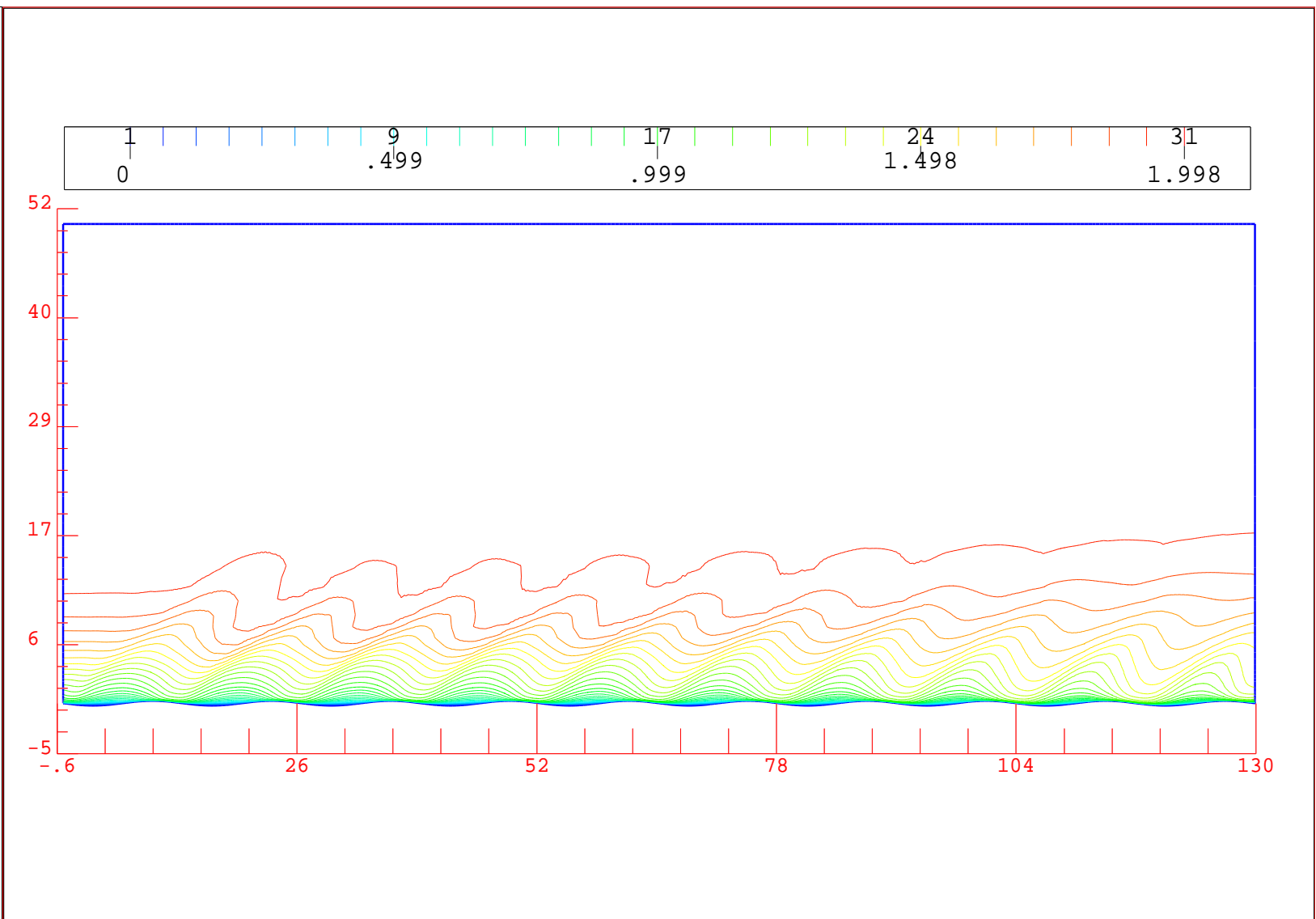


FIG. 9 - *Cas 1 : iso-mach.*

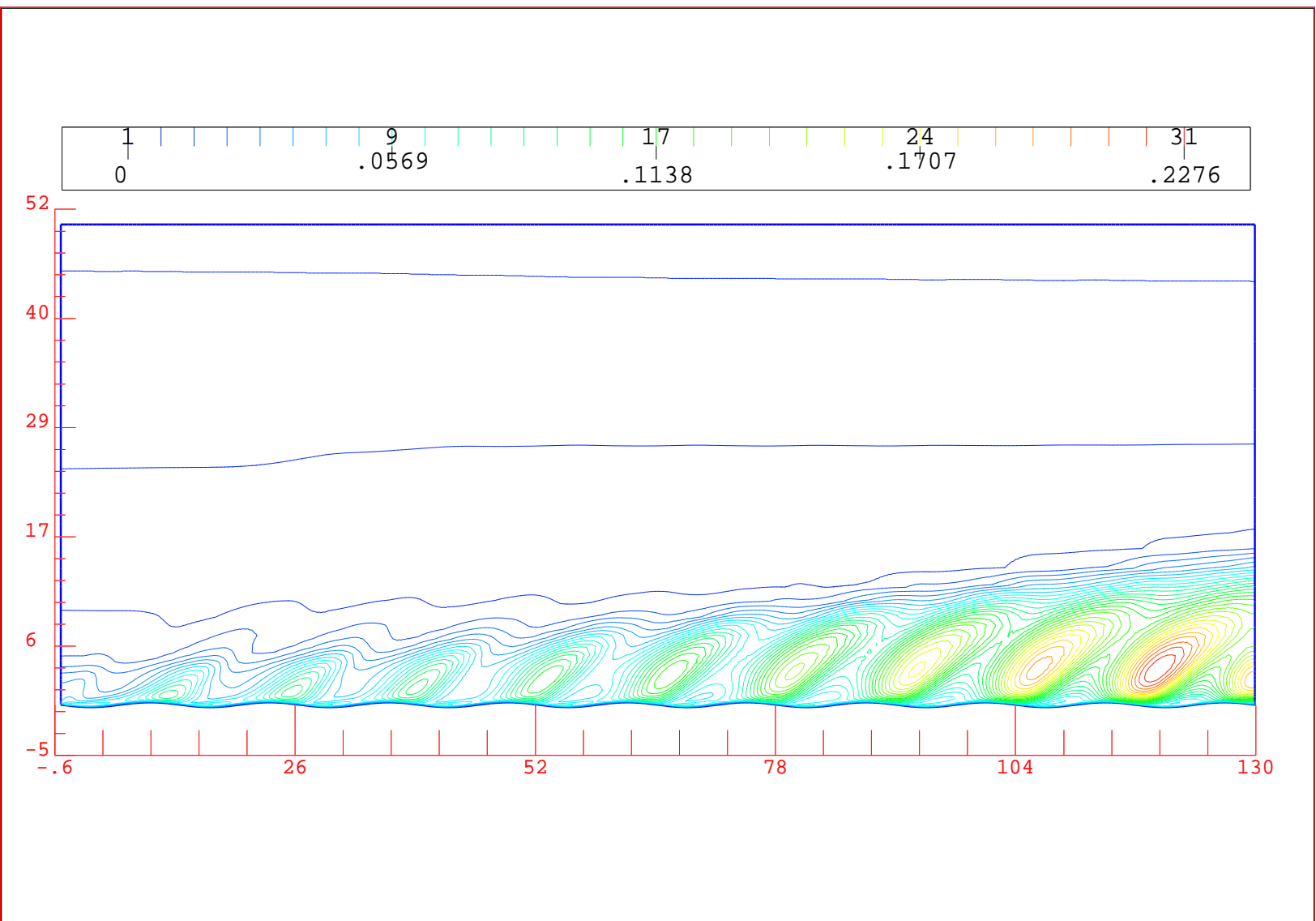


FIG. 10 - *Cas 1 : isovaleurs de  $\sqrt{\frac{2k}{3}}$ .*

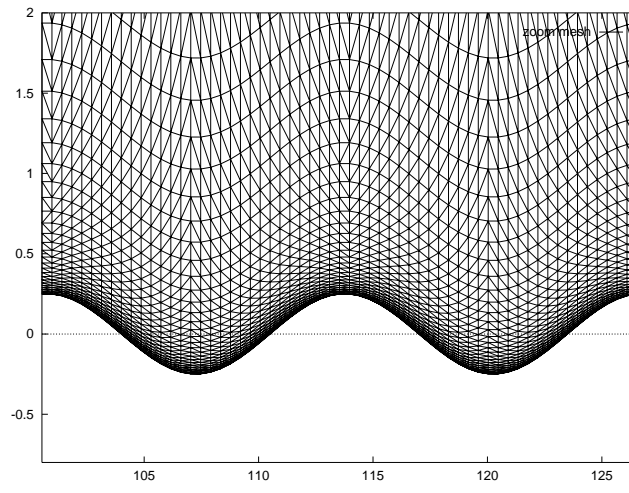


FIG. 11 - *Cas 1 : Zoom du domaine : 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> rugosités.*

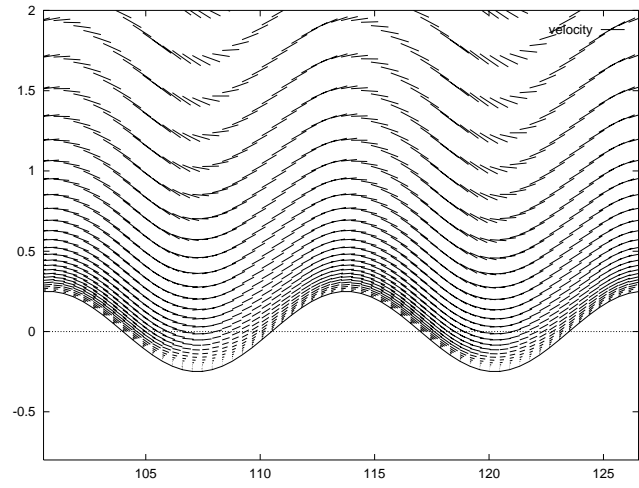
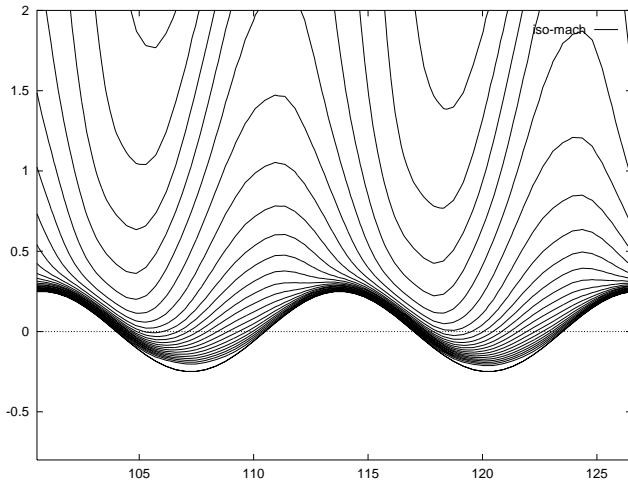


FIG. 12 - *Cas 1 : Zoom : iso-mach (gauche) et champ de vitesse (droite).*

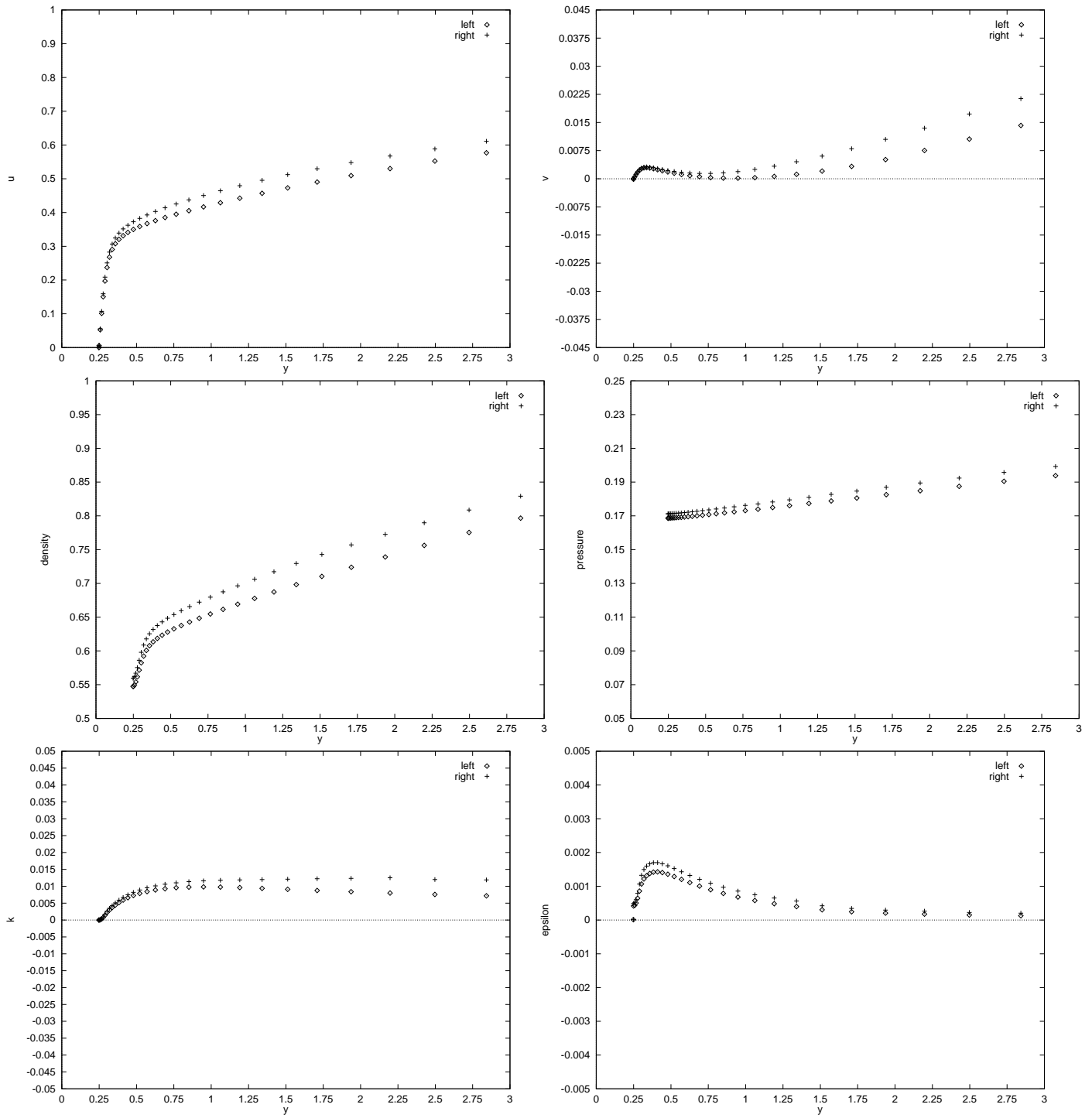


FIG. 13 - *Cas 1 : Comparaison du profil entre deux rugosités : vitesse tangentielle, vitesse normale, densité, pression, énergie turbulente et dissipation de l'énergie turbulente. Ici,  $y$  correspond à  $y = y + \frac{h}{2}$ .*

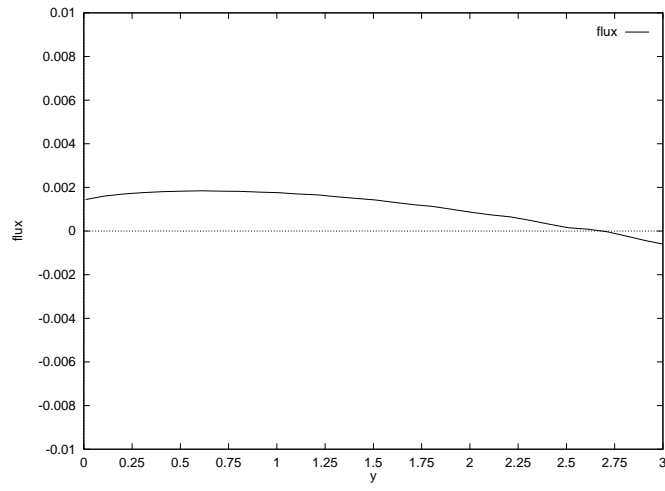


FIG. 14 - *Cas 1 : flux de masse à  $\Gamma_s$  en fonction de la hauteur.*

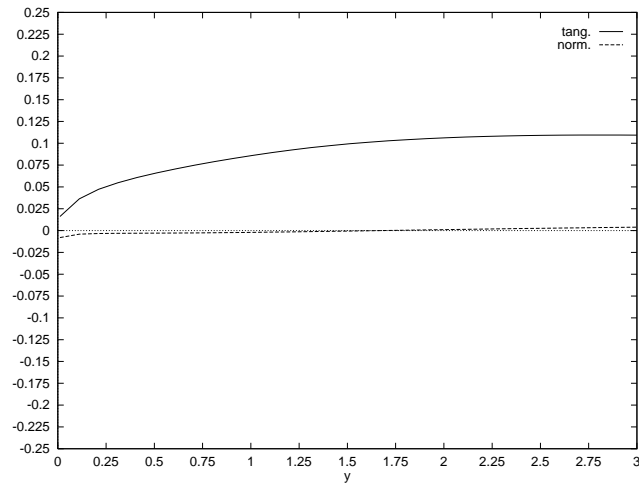


FIG. 15 - *Cas 1 :  $err_{per} M$  en fonction de la hauteur de couplage.*

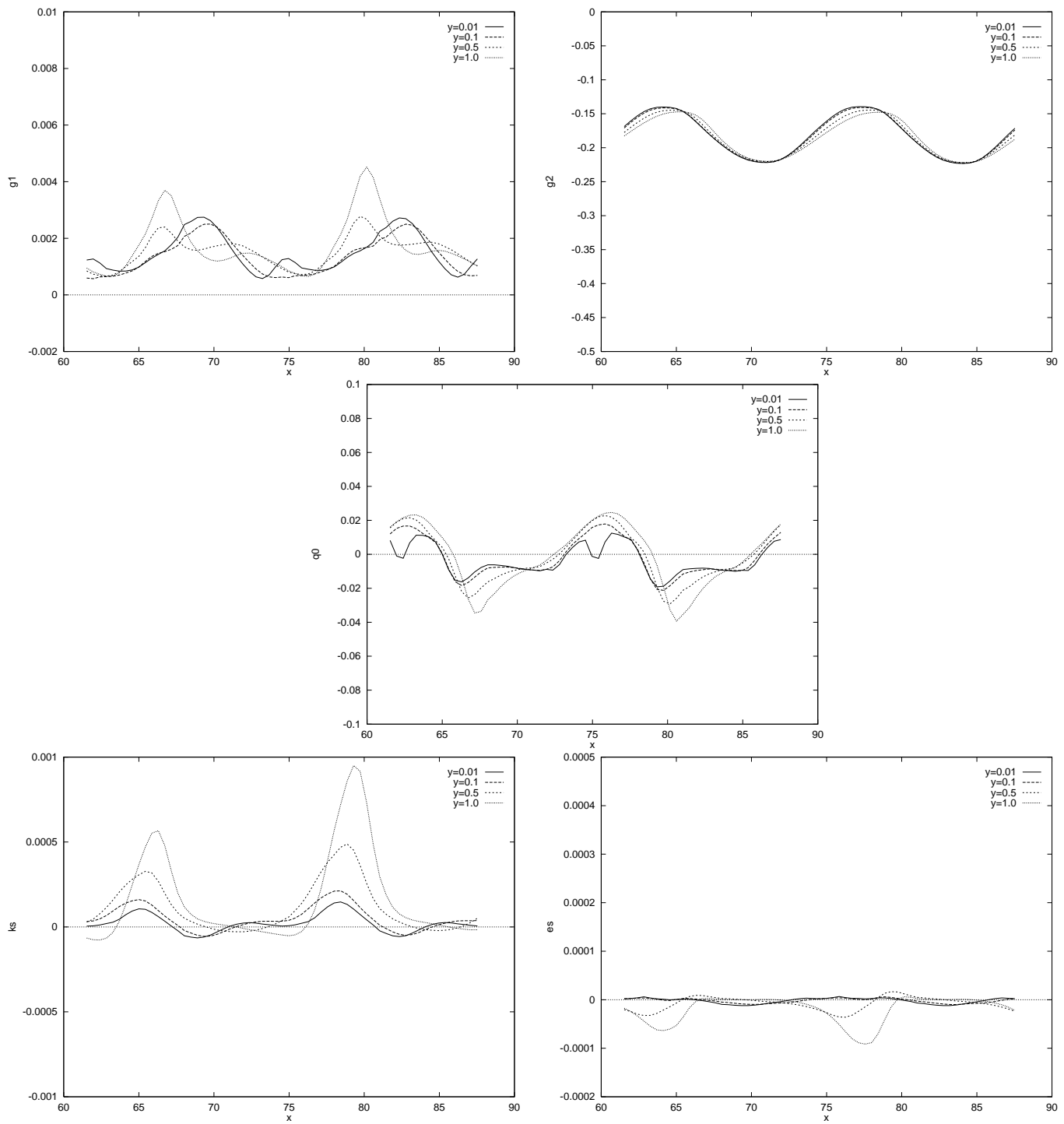


FIG. 16 - *Cas 1: profil  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $q_0$ ,  $k_s$ ,  $\epsilon_s$ , en fonction de la hauteur de couplage.*

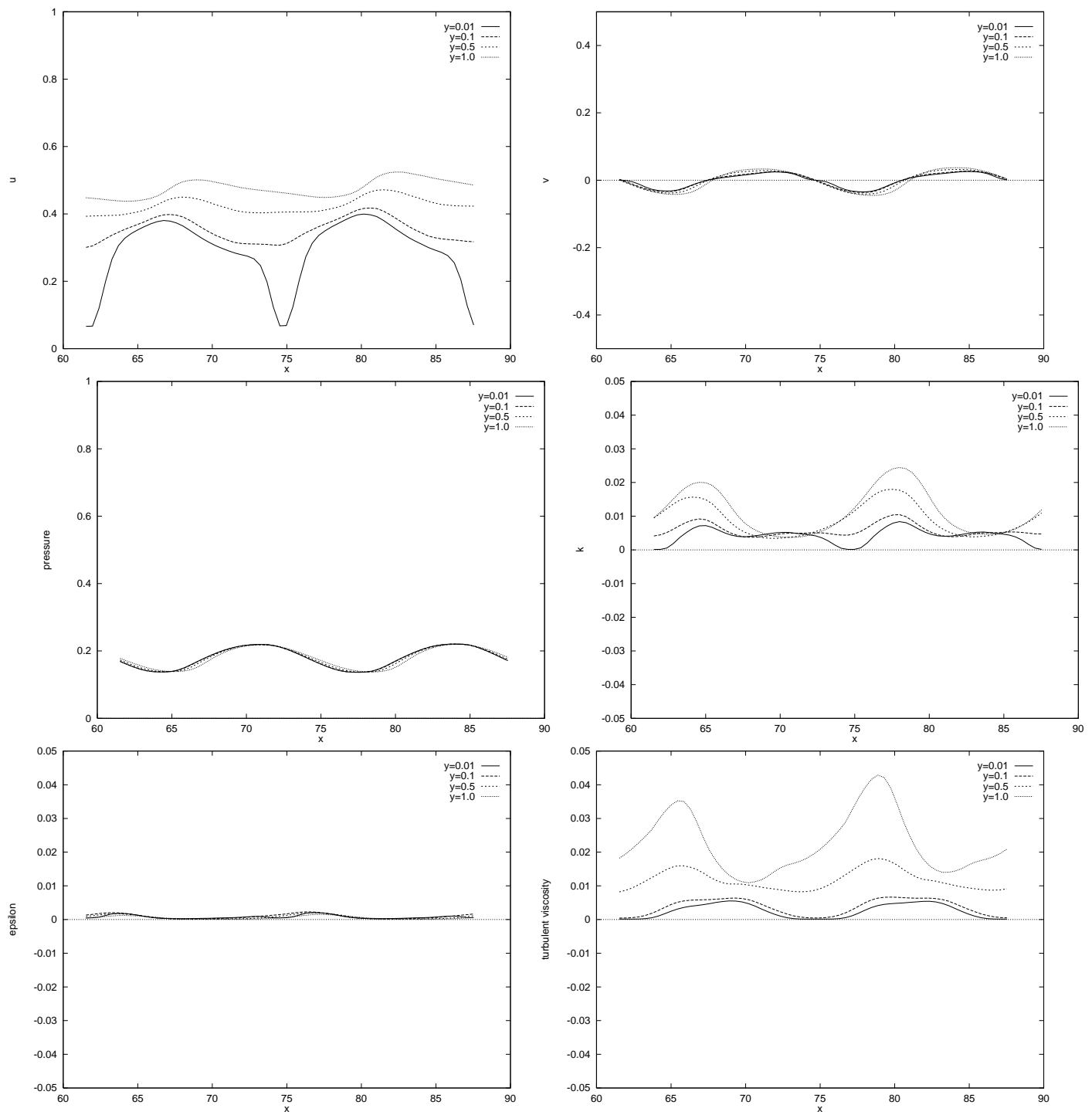
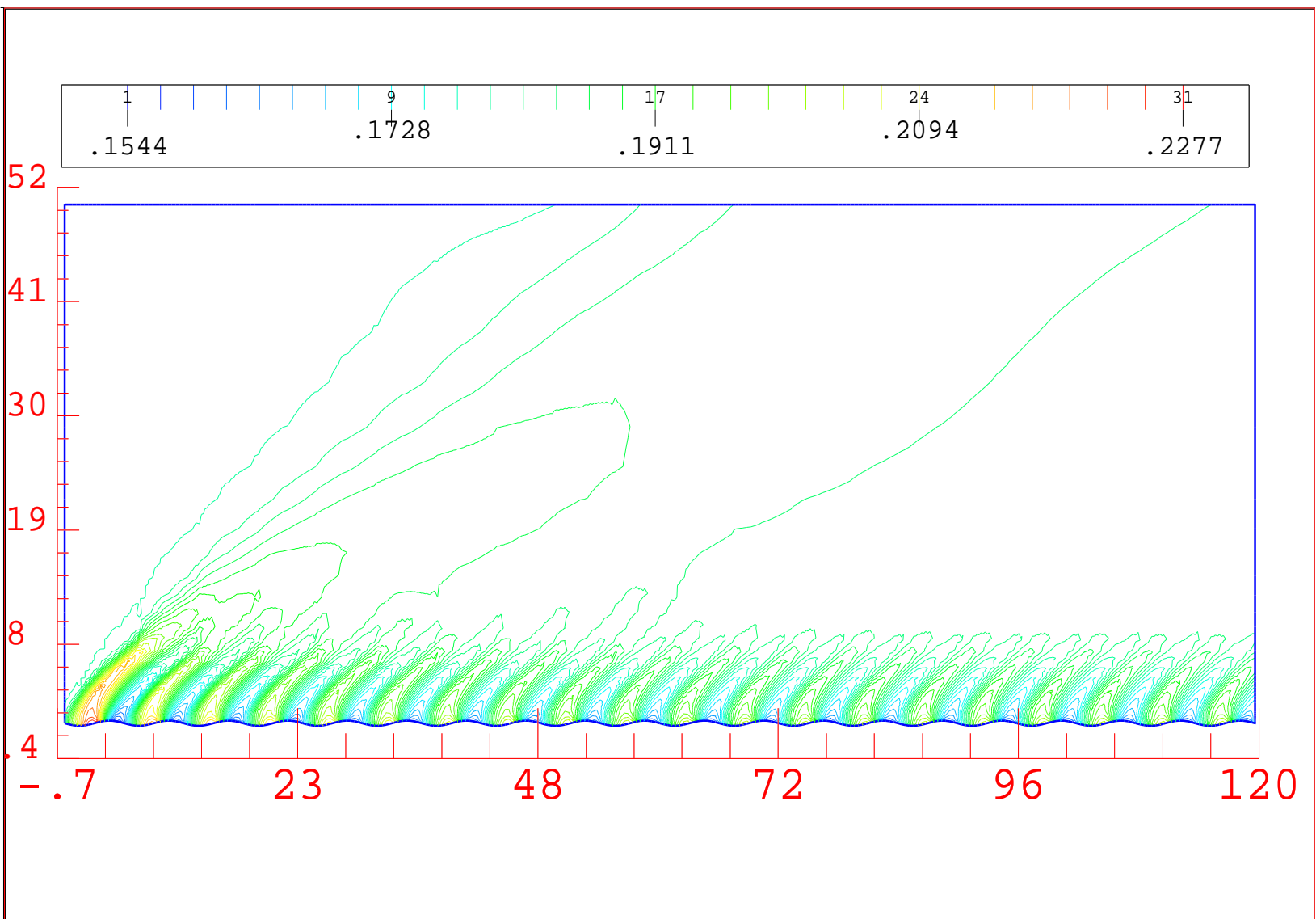


FIG. 17 - Cas 1 : profils de  $u_1$ ,  $u_2$ , pression,  $k$ ,  $\epsilon$  et  $\nu_t$  à quatre hauteurs différentes.



FIG. 18 - *Cas 2: iso-pressure*

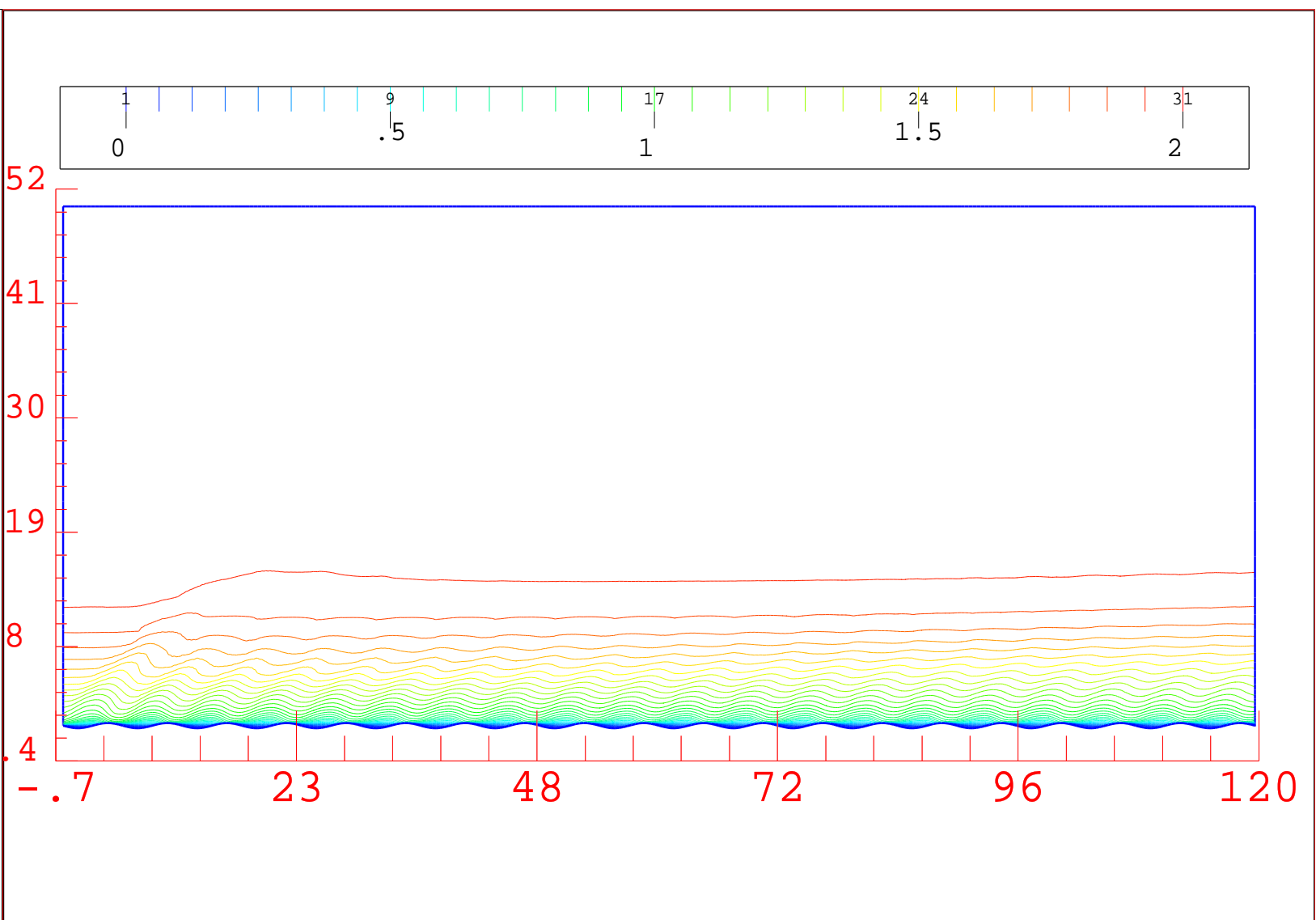
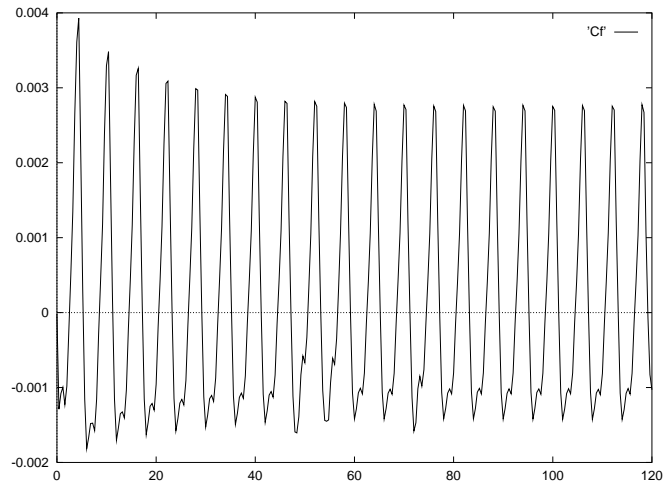
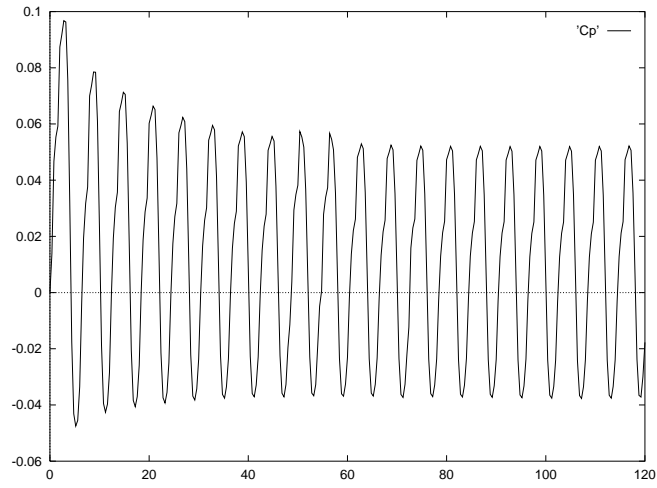


FIG. 19 - *Cas 2 : iso-mach*

FIG. 20 - *Cas 2* :  $C_f$ FIG. 21 - *Cas 2* :  $C_p$

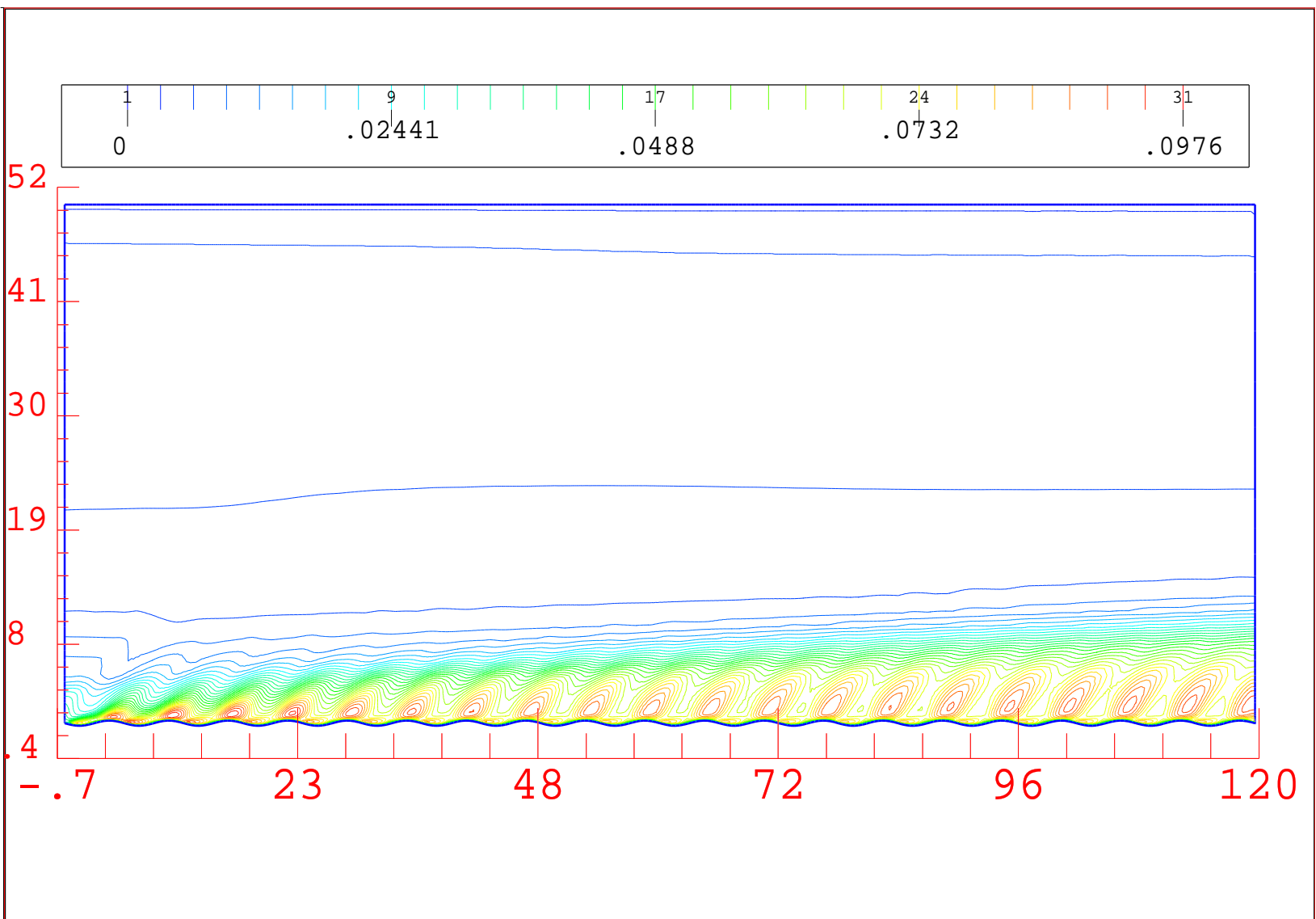


FIG. 22 - Cas 2 : isovaleurs de  $\sqrt{k}$

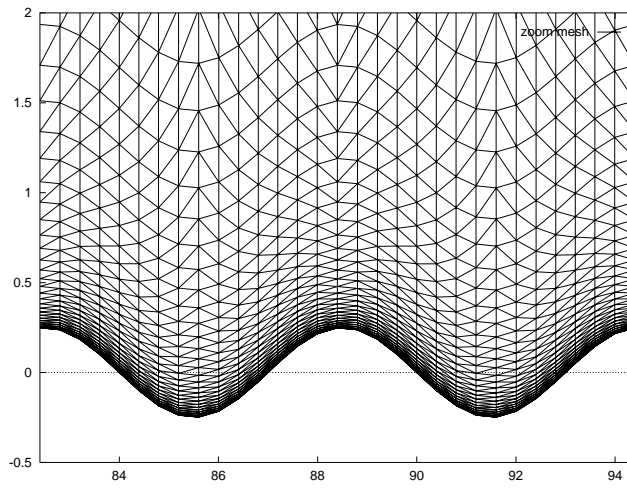


FIG. 23 - *Cas 2 : zoom du domaine : 14<sup>ème</sup> et 15<sup>ème</sup> rugosités*

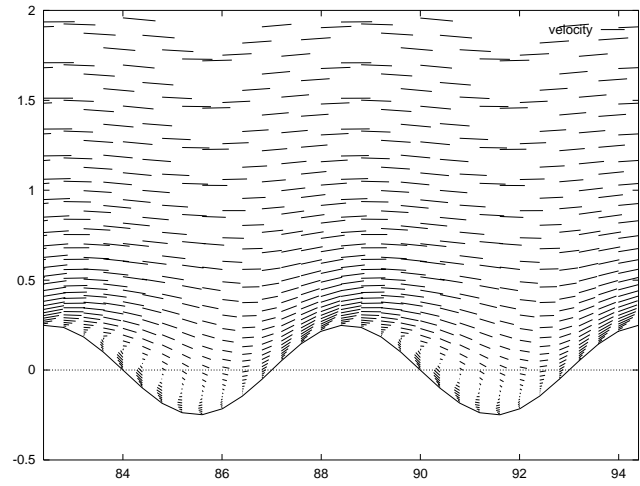
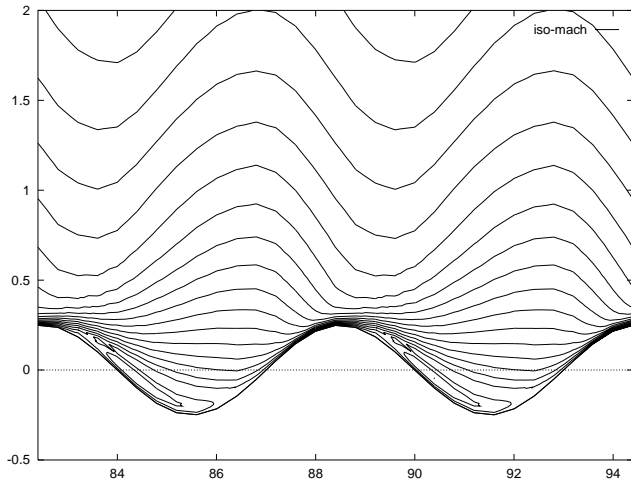


FIG. 24 - *Cas 2 : Zoom : iso-mach (gauche) et champ de vitesse (droite)*

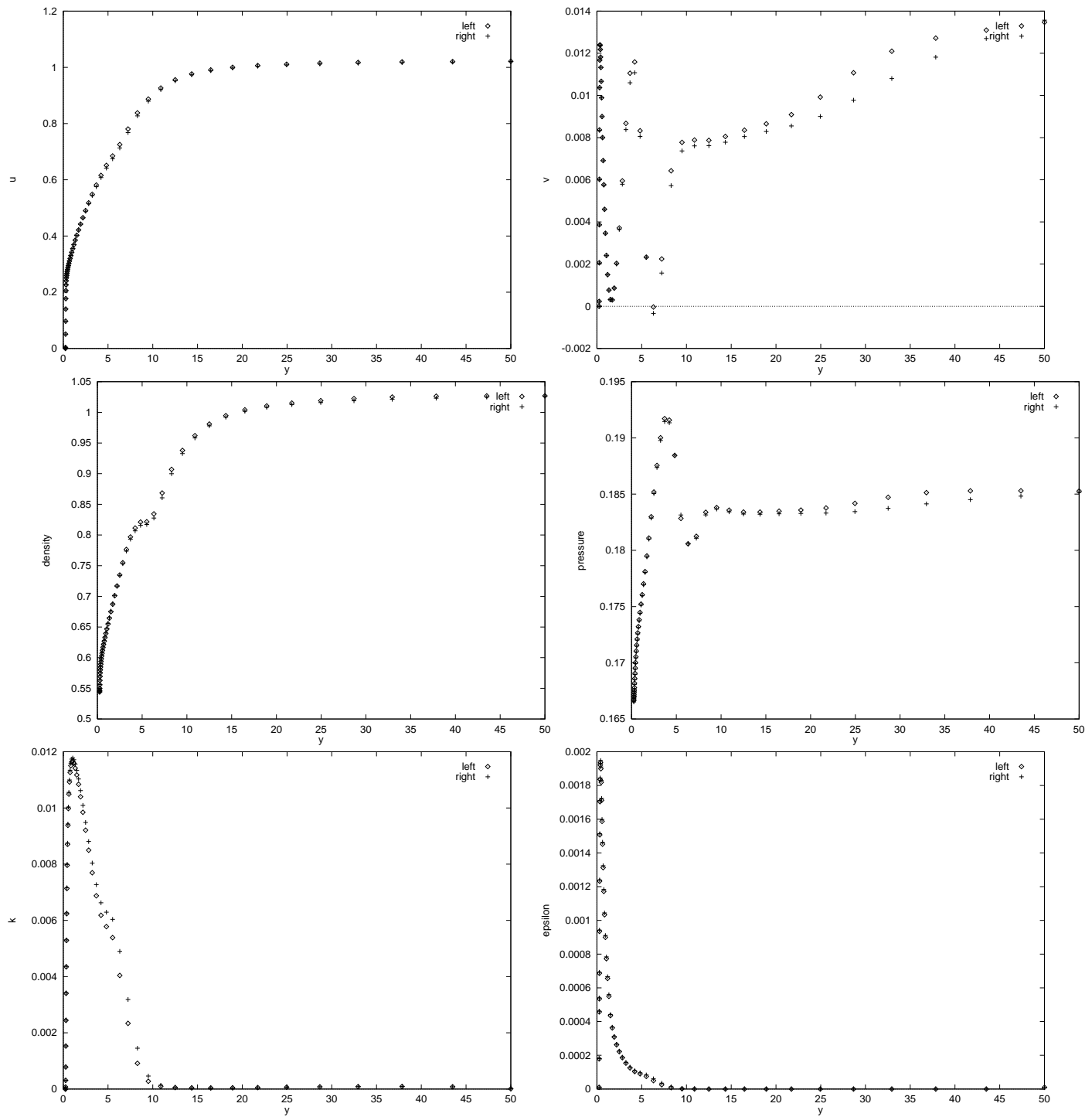


FIG. 25 - *Cas 2: Comparaison du profil entre deux rugosités : vitesse tangentielle, vitesse normale, densité, pression, énergie turbulente et dissipation de l'énergie turbulente*

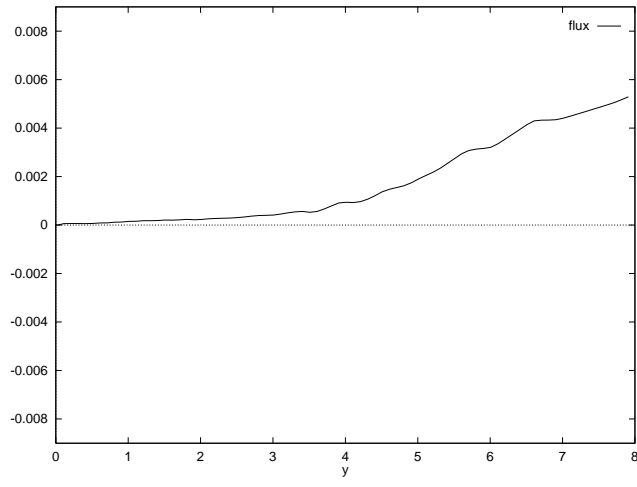


FIG. 26 - *Cas 2: flux de masse à  $\Gamma_s$  en fonction de la hauteur.*

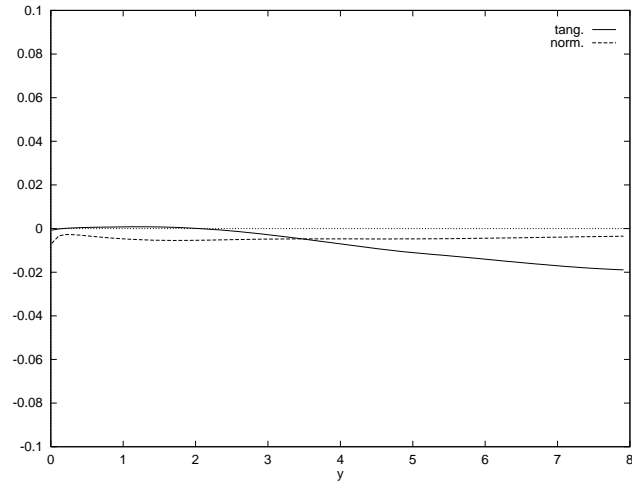


FIG. 27 - *Cas 2:  $err_{per} M$  en fonction de la hauteur de couplage.*

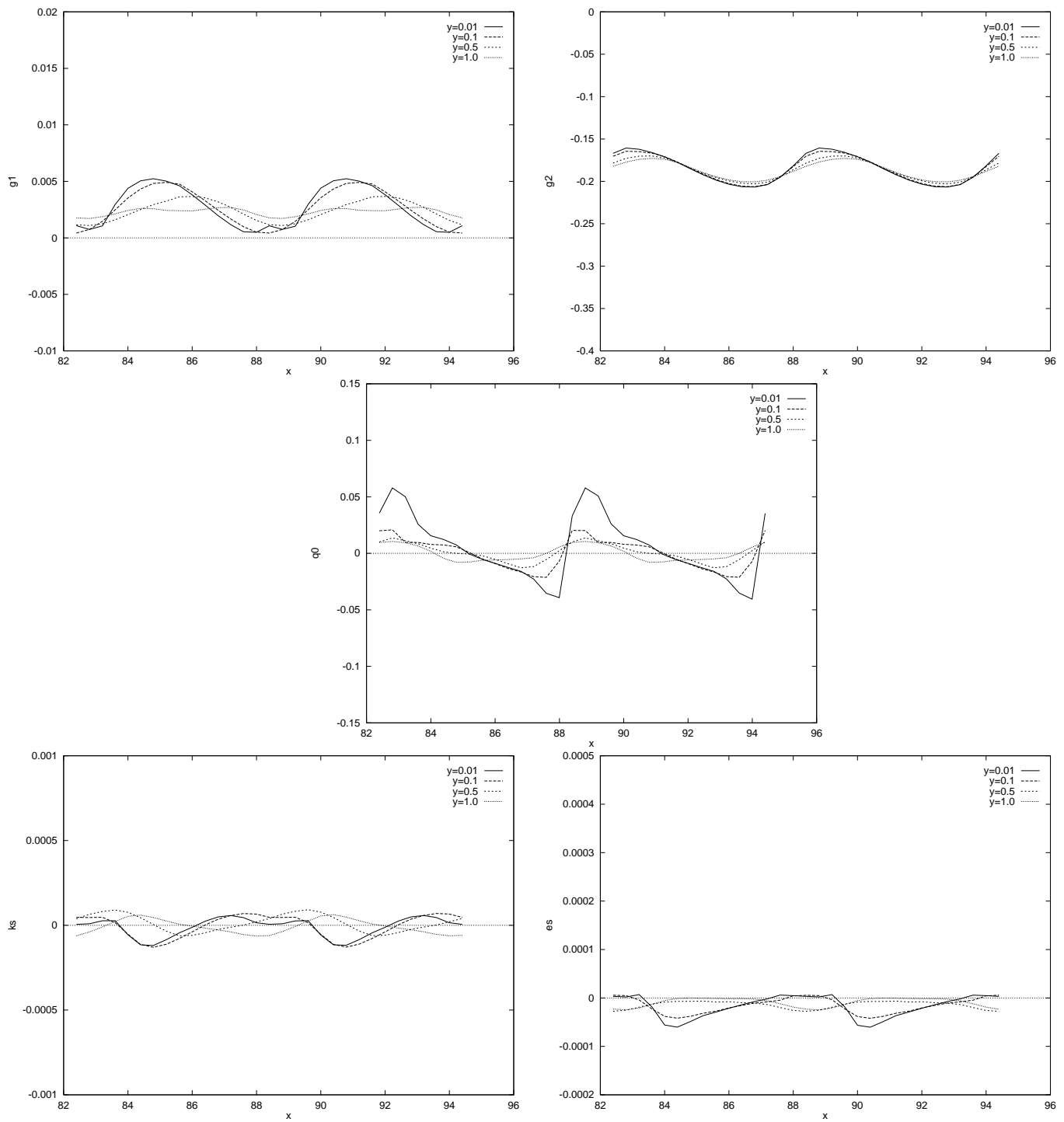


FIG. 28 - Cas 2 : profil  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $q_0$ ,  $k_s$ ,  $\epsilon_s$ , en fonction de la hauteur de couplage.



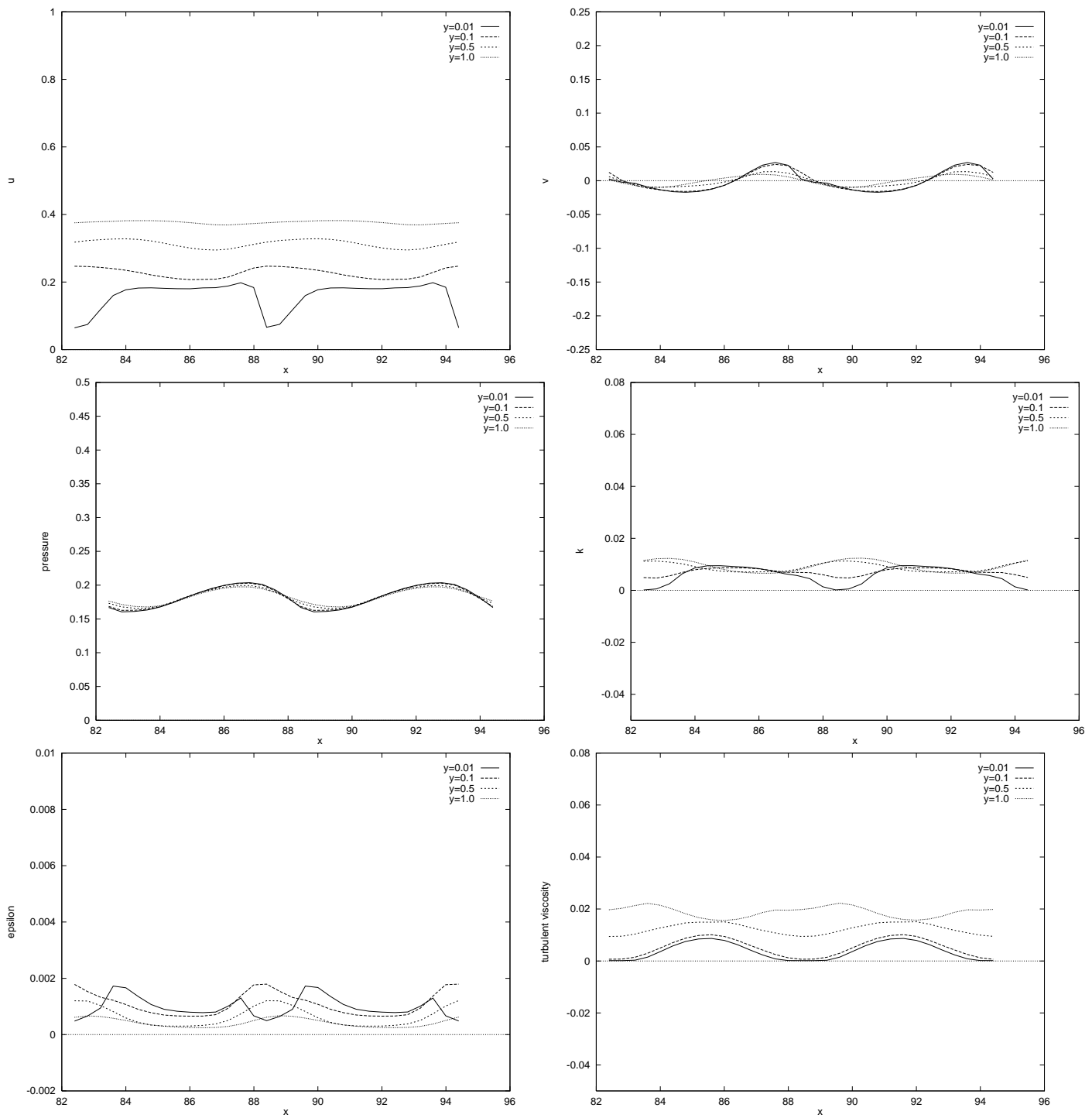


FIG. 29 - Cas 2 : profils de  $u_1$ ,  $u_2$ , pression,  $k$ ,  $\epsilon$  et  $\nu_t$  à quatre hauteurs différentes.

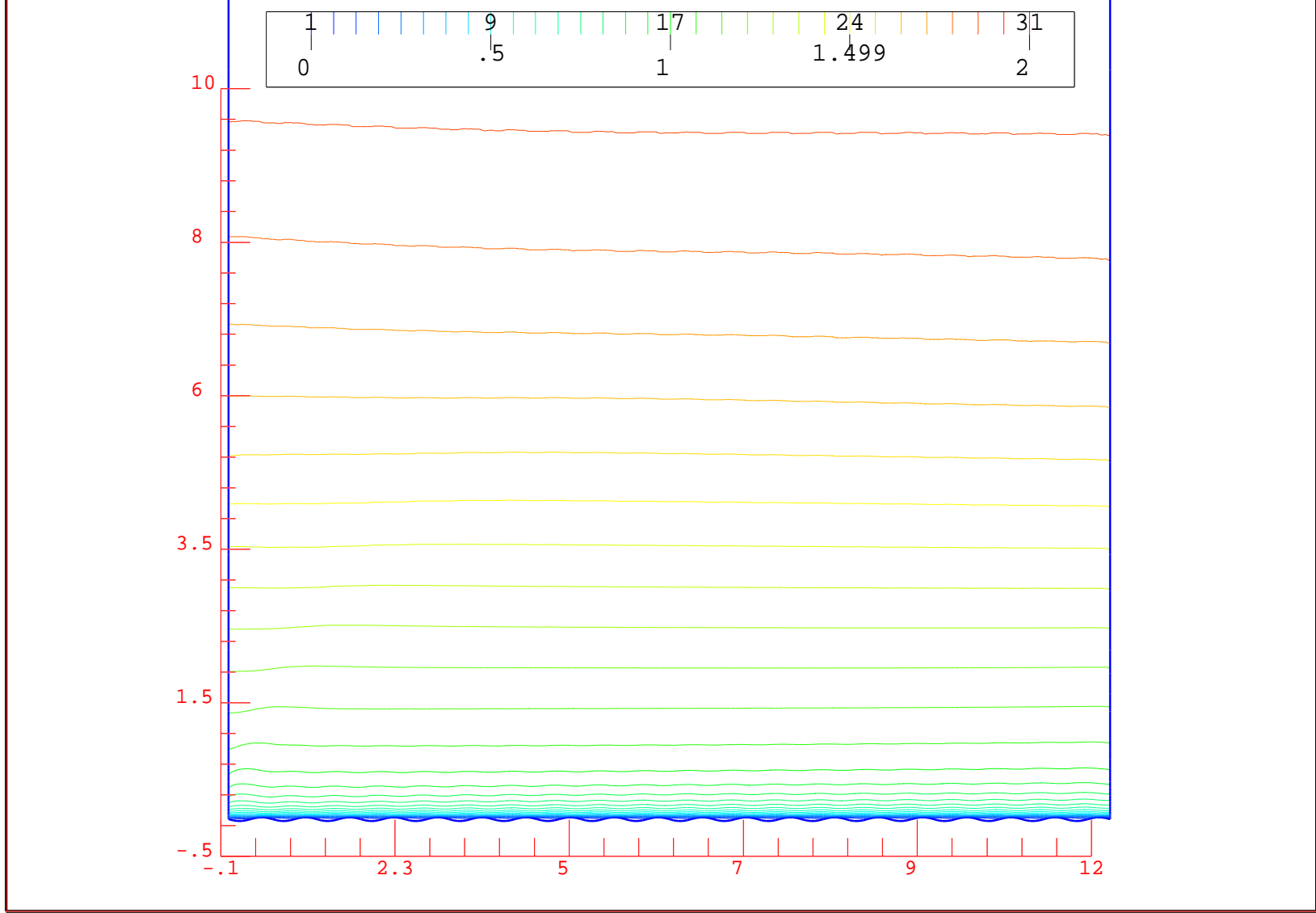


FIG. 30 - *Cas 3 : iso-mach avec bicoche.*

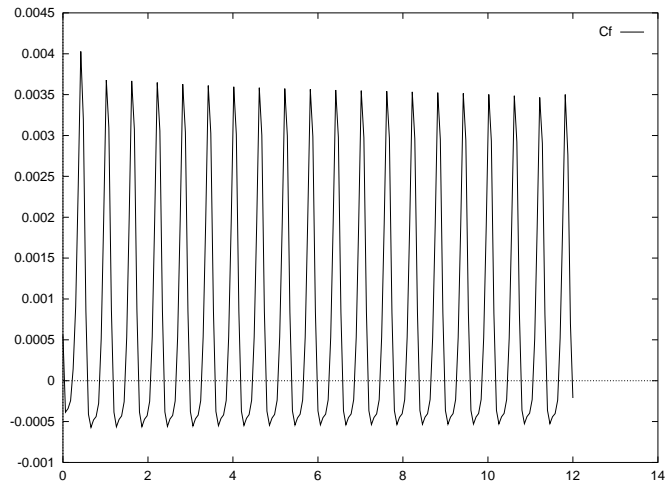


FIG. 31 - *Cas 3:  $C_f$  avec bicouche.*

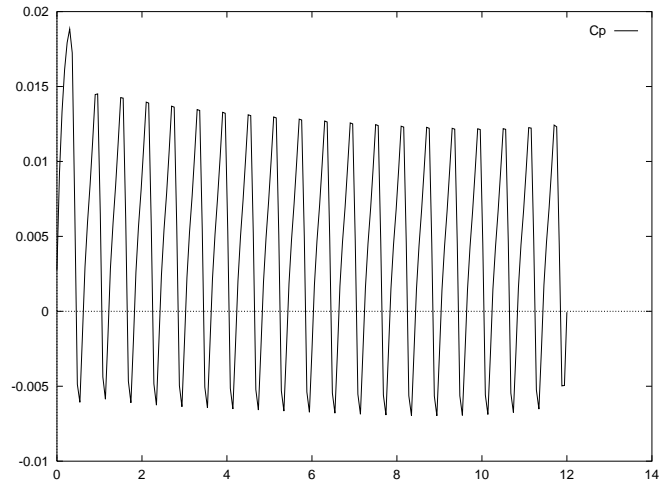


FIG. 32 - *Cas 3:  $C_p$  avec bicouche.*

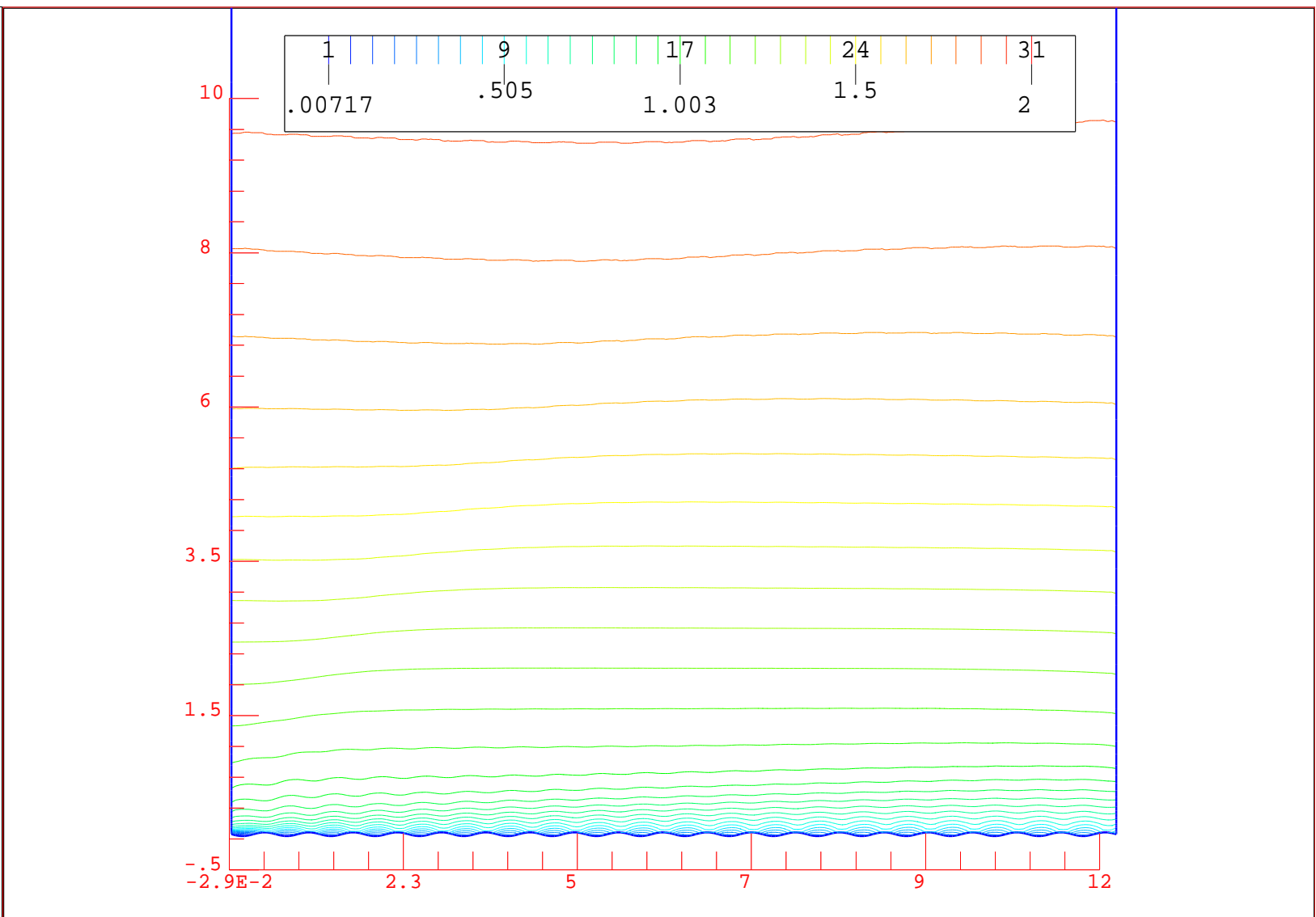


FIG. 33 - *Cas 3*: iso-mach avec loi de paroi ( $\delta = 0.1$ )

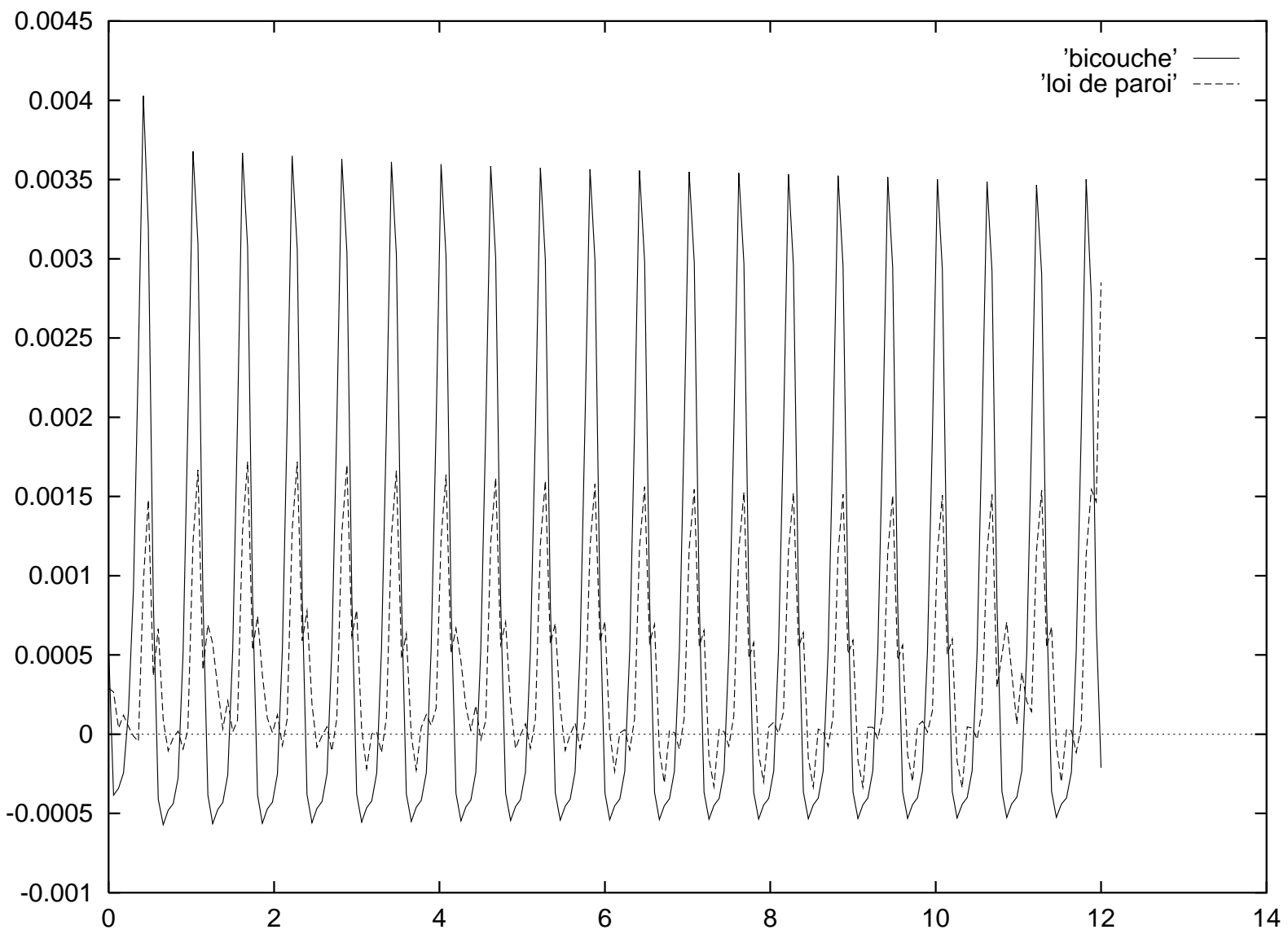


FIG. 34 - *Cas 3 : comparaison  $C_f$  entre la loi de paroi ( $\delta = 0.1$ ) et bicouche.*

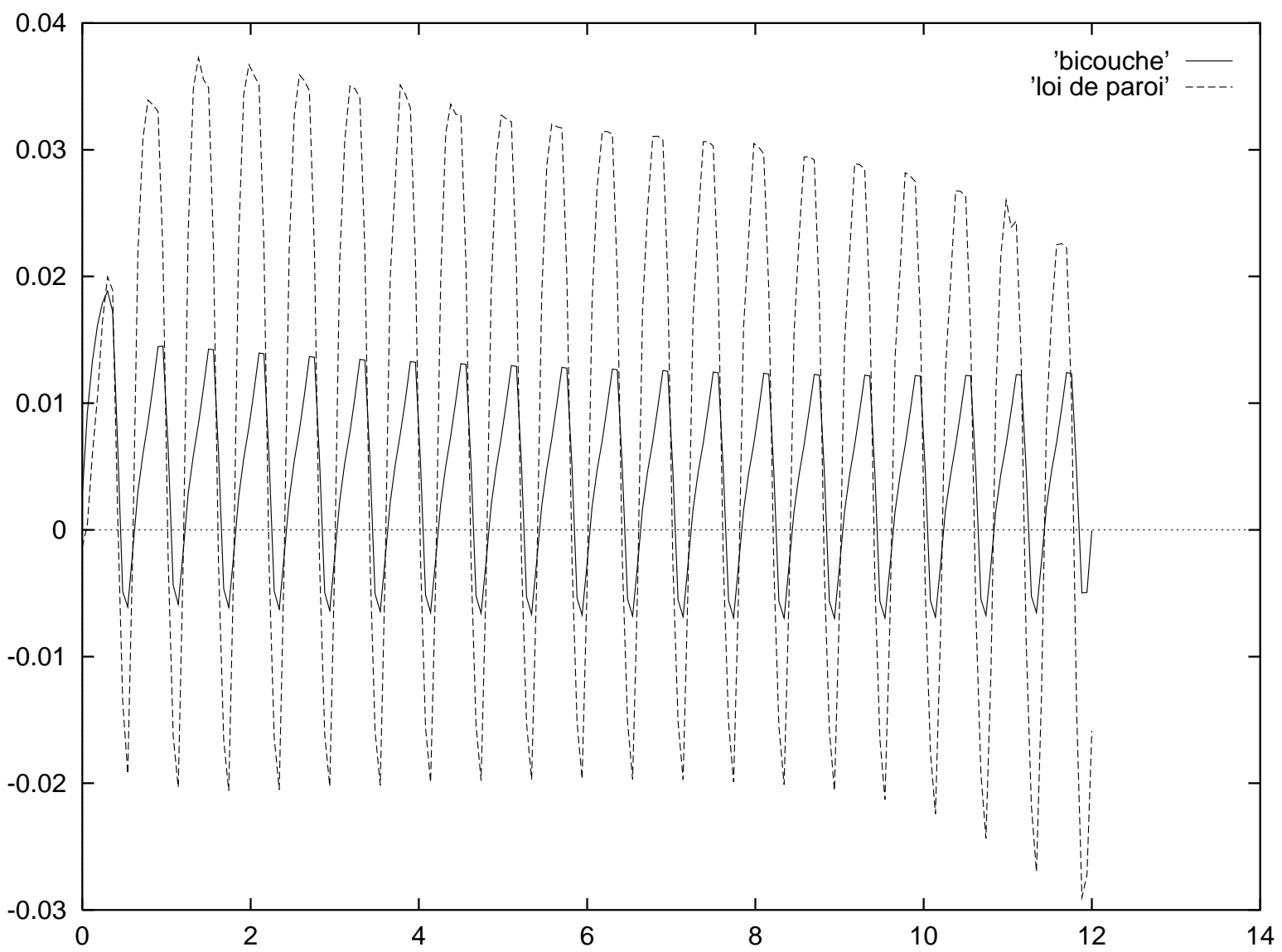


FIG. 35 - *Cas 3 : comparaison  $C_p$  entre la loi de paroi ( $\delta = 0.1$ ) et bicouche.*

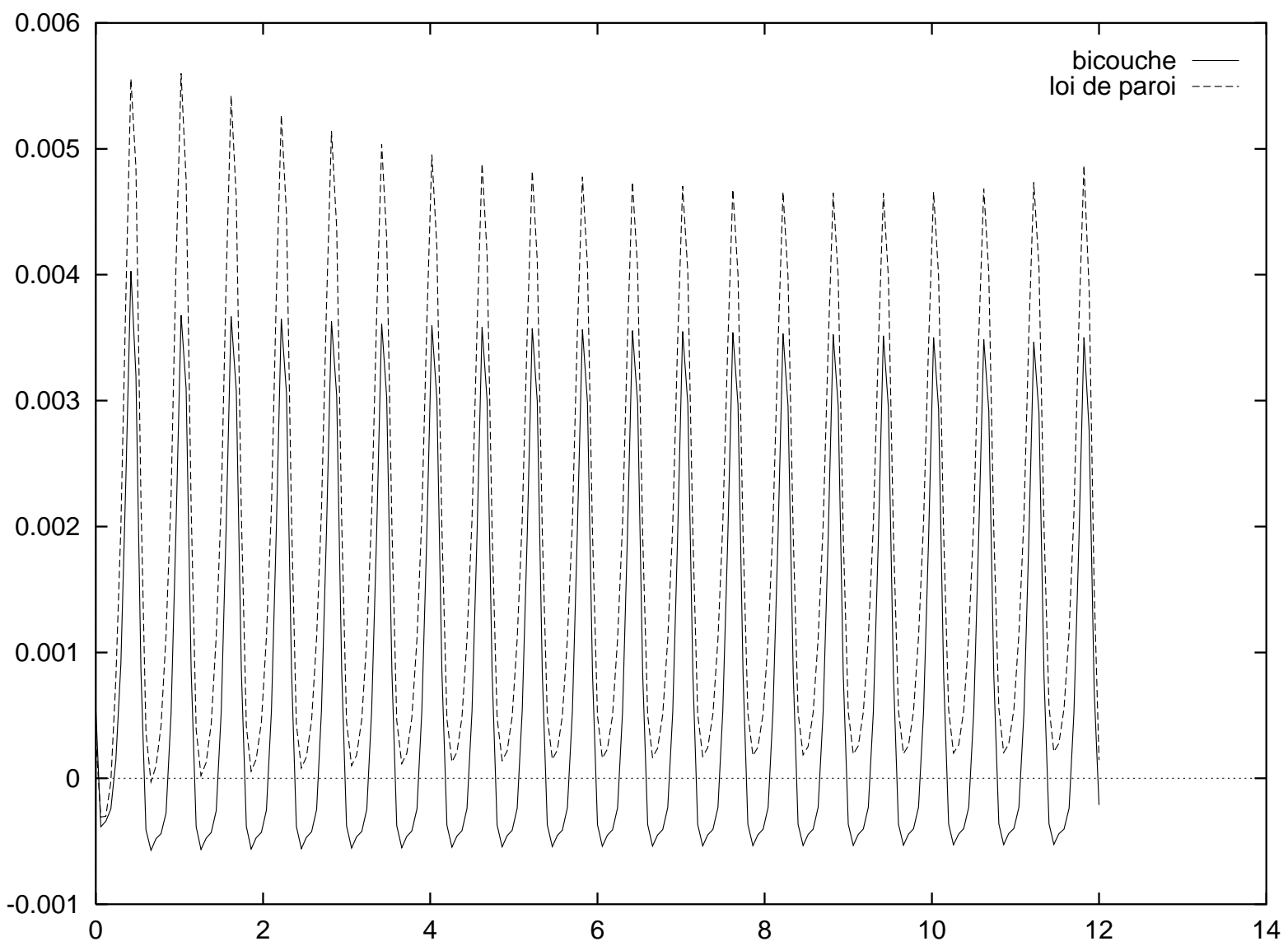


FIG. 36 - *Cas 3 : comparaison  $C_f$  entre la loi de paroi ( $\delta = 0.0005$ ) et bicouche.*

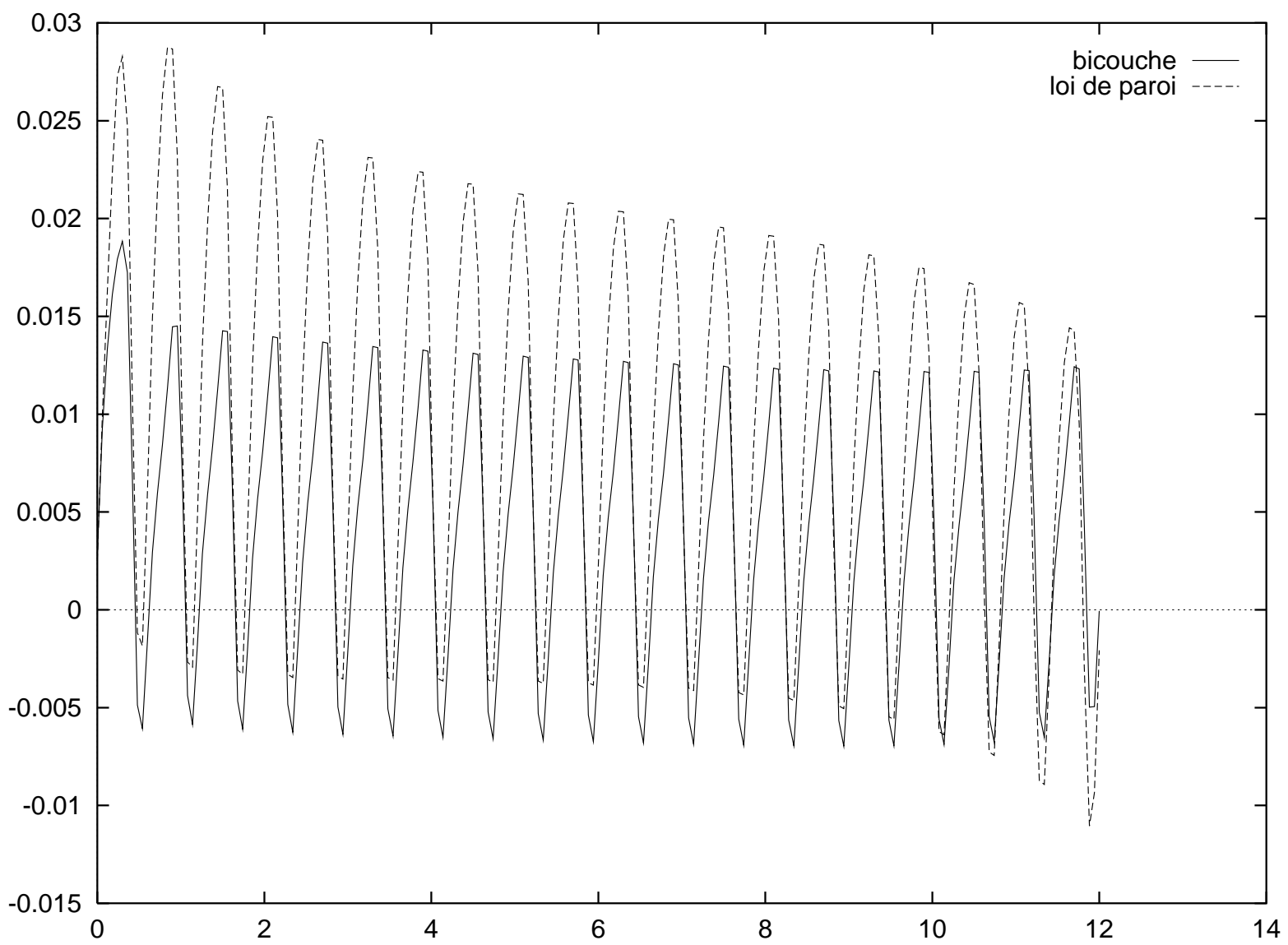


FIG. 37 - *Cas 3*: comparaison  $C_p$  entre la loi de paroi ( $\delta = 0.0005$ ) et bicouche.



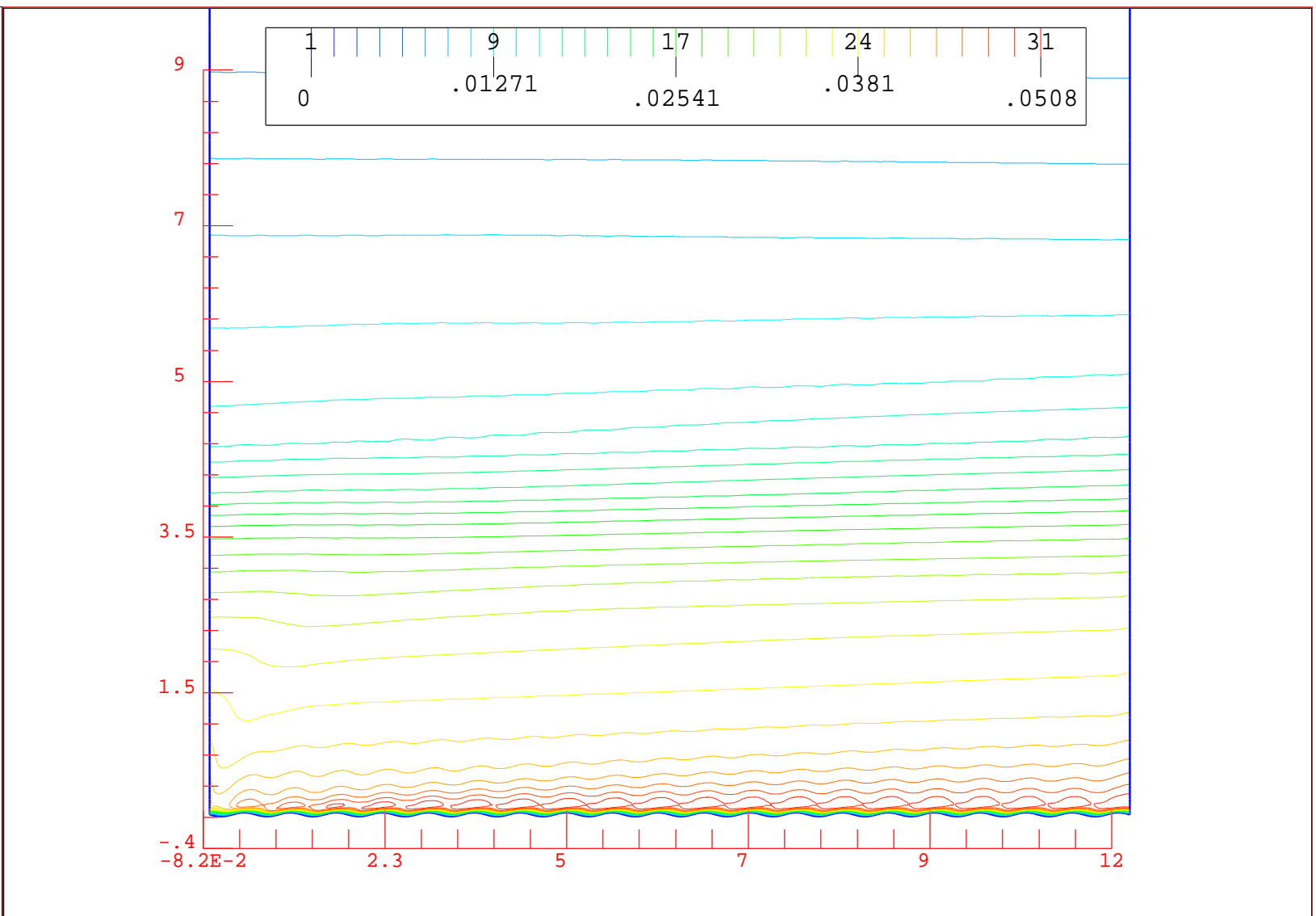


FIG. 38 - *Cas 3 : isovaleurs de  $\sqrt{\frac{2k}{3}}$  avec bicouche*

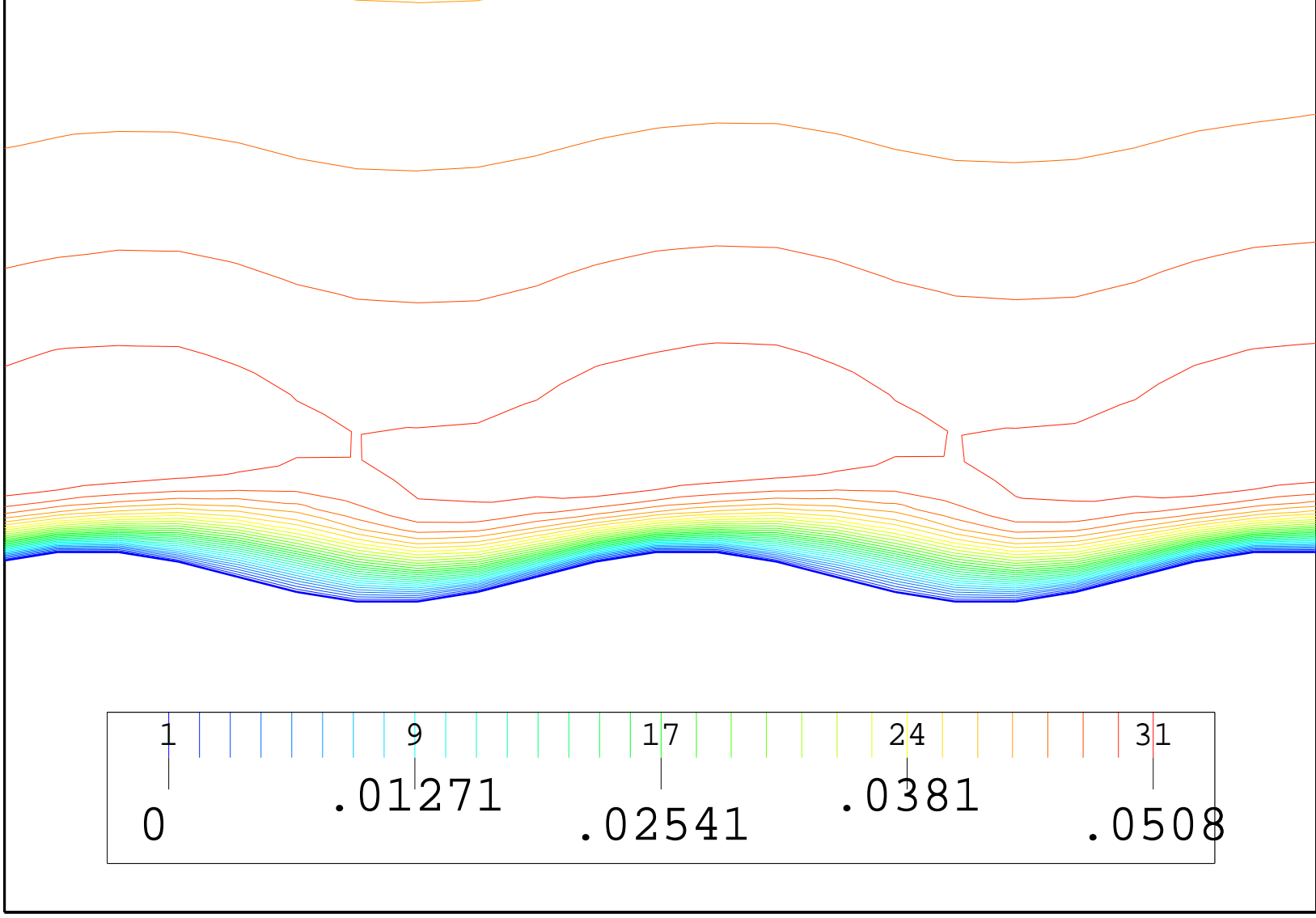


FIG. 39 - *Cas 3* : zoom des isovaleurs de  $\sqrt{2k}/3$  avec bicoûche, 14<sup>ème</sup> et 15<sup>ème</sup> rugosités

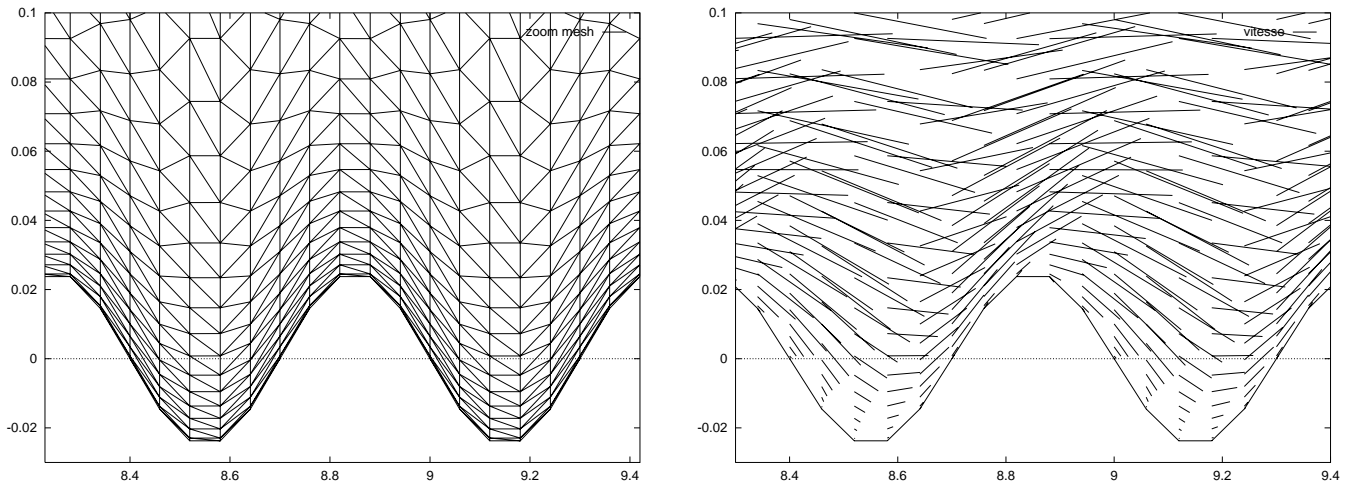


FIG. 40 - *Cas 3: zoom du domaine : 14<sup>eme</sup> et 15<sup>eme</sup> rugosités (gauche). A droite, champ de vitesse avec la loi de paroi ( $\delta = 0.0005$ ). On remarque l'absence de recirculations en aval des rugosités.*

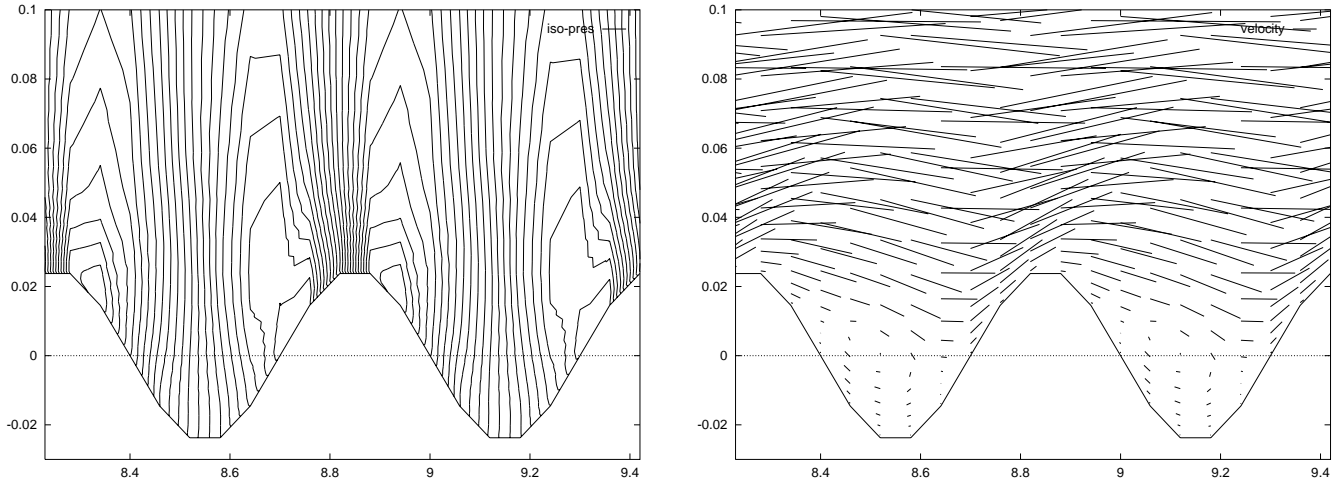


FIG. 41 - *Cas 3: zoom: iso-pression (gauche) et champ de vitesse (droite) avec bicouche. On retrouve les recirculations en aval des rugosités.*

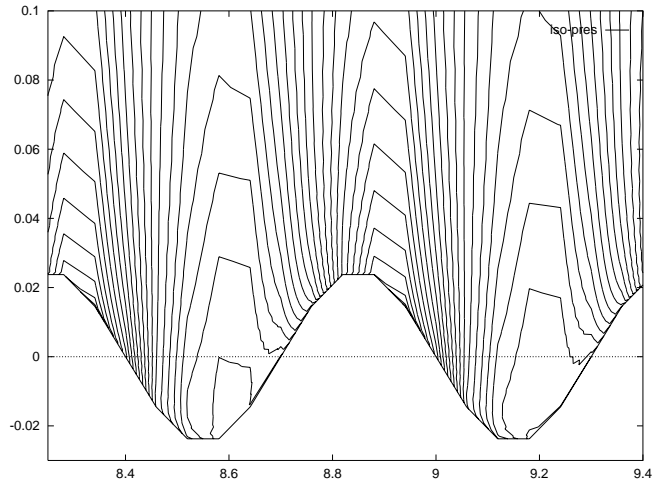


FIG. 42 - *Cas 3: zoom des iso-pressions avec loi de paroi ( $\delta = 0.1$ )*

	$y=0.002$	$y = 0.01$	$y = 0.05$	$y = 0.1$	$y = 0.25$	$y = 0.5$
$\int_{\Gamma_s} (\sigma_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x$	100%	99.49%	99.49%	98.45%	94.54%	85.57%
$\int_{\Gamma_s} (\sigma_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_y$	100%	96.61%	96.98%	97.08%	97.04%	96.95%
$\int_{\Gamma_s} \rho uv$	0%	-0.11%	0.20%	0.93%	3.92%	10.75%

TAB. 1 - *On compare le taux de cisaillement à  $y$ , au taux correspondant à  $y = 0.002$ . Le rapport s'écrit  $\frac{T_{s2}}{T_p}$  (première et deuxième ligne) et  $\frac{T_{s1}}{T_p} \cdot \mathbf{e}_x$  (troisième ligne) avec nos notations.*

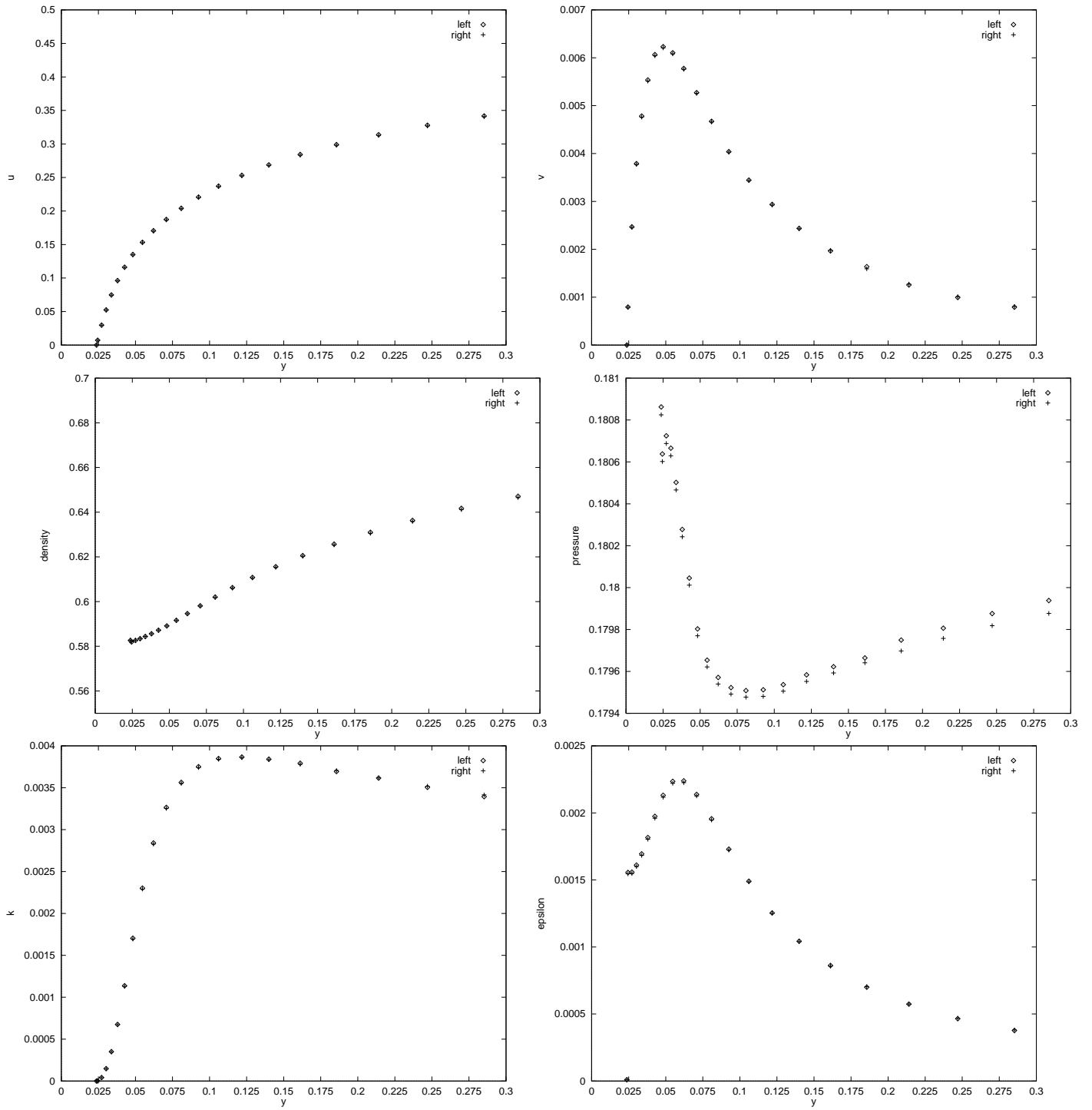


FIG. 43 - *Cas 3: Comparaison du profil entre deux rugosités : vitesse tangentielle, vitesse normale, densité, pression, énergie turbulente et dissipation de l'énergie turbulente avec bicouche. Ici  $y = y + \frac{h}{2}$ .*

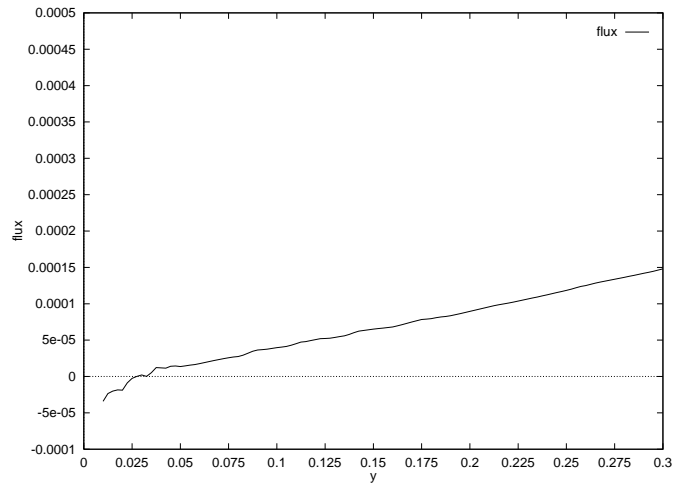


FIG. 44 - *Cas 3: flux de masse à  $\Gamma_s$  en fonction de la hauteur (avec bicouche). Ici  $y = y + \frac{h}{2}$ .*

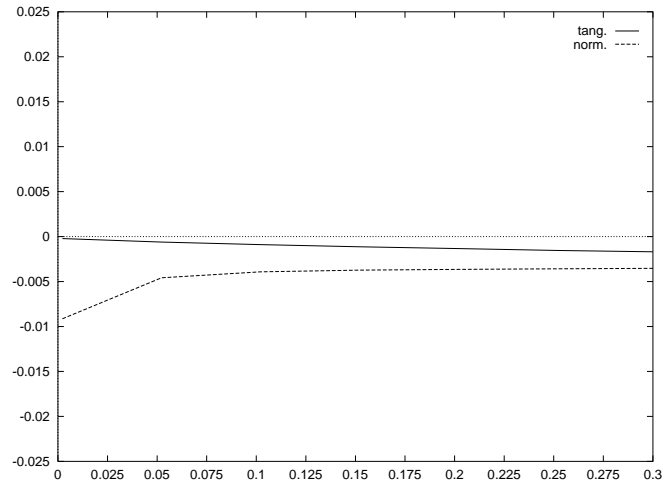


FIG. 45 - *Cas 3:  $err_{per}M$  en fonction de la hauteur de couplage (avec bicouche).*

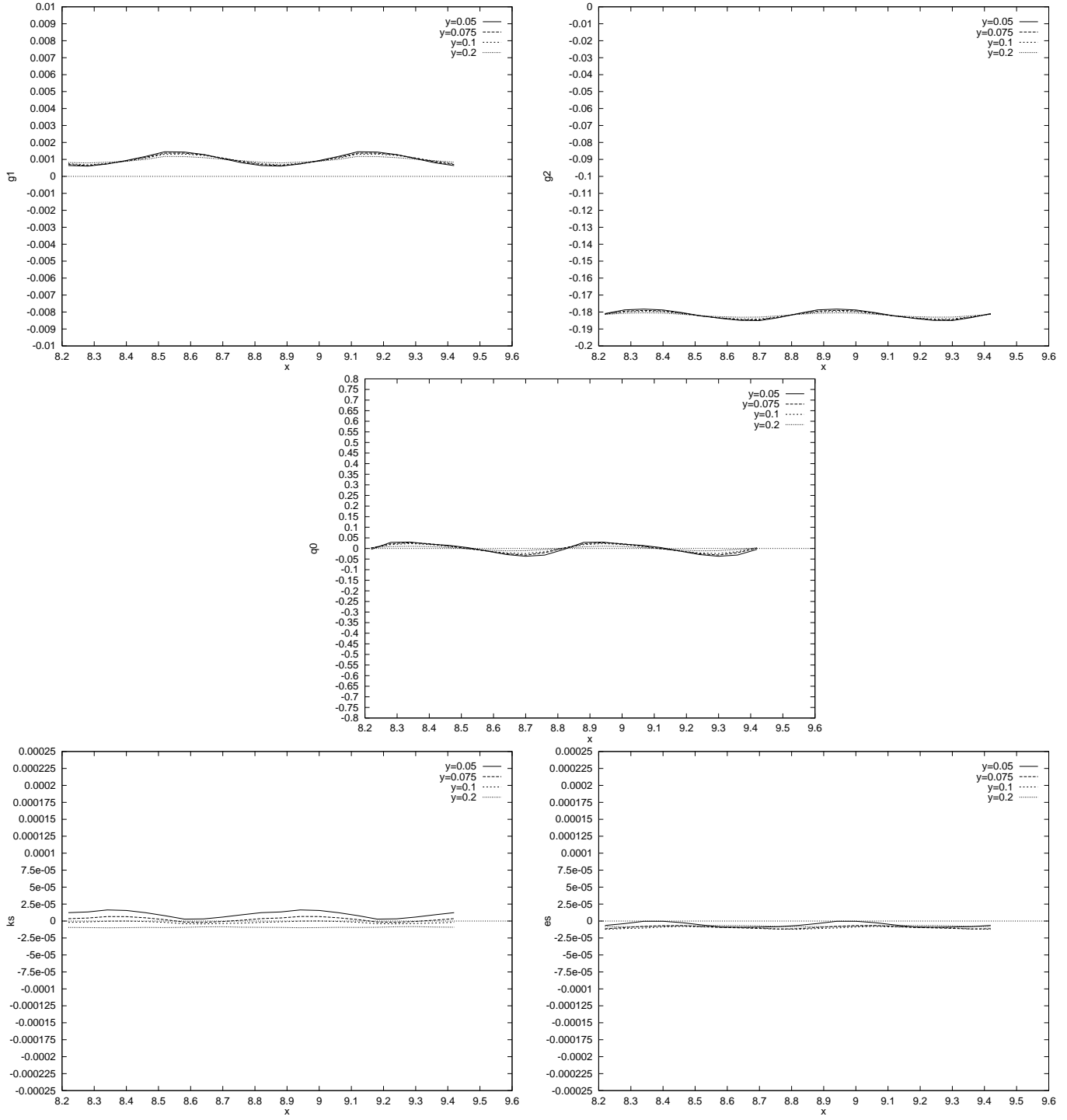


FIG. 46 - Cas 3 : profil  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $q_0$ ,  $k_s$ ,  $\epsilon_s$ , en fonction de la hauteur de couplage (bicouche).

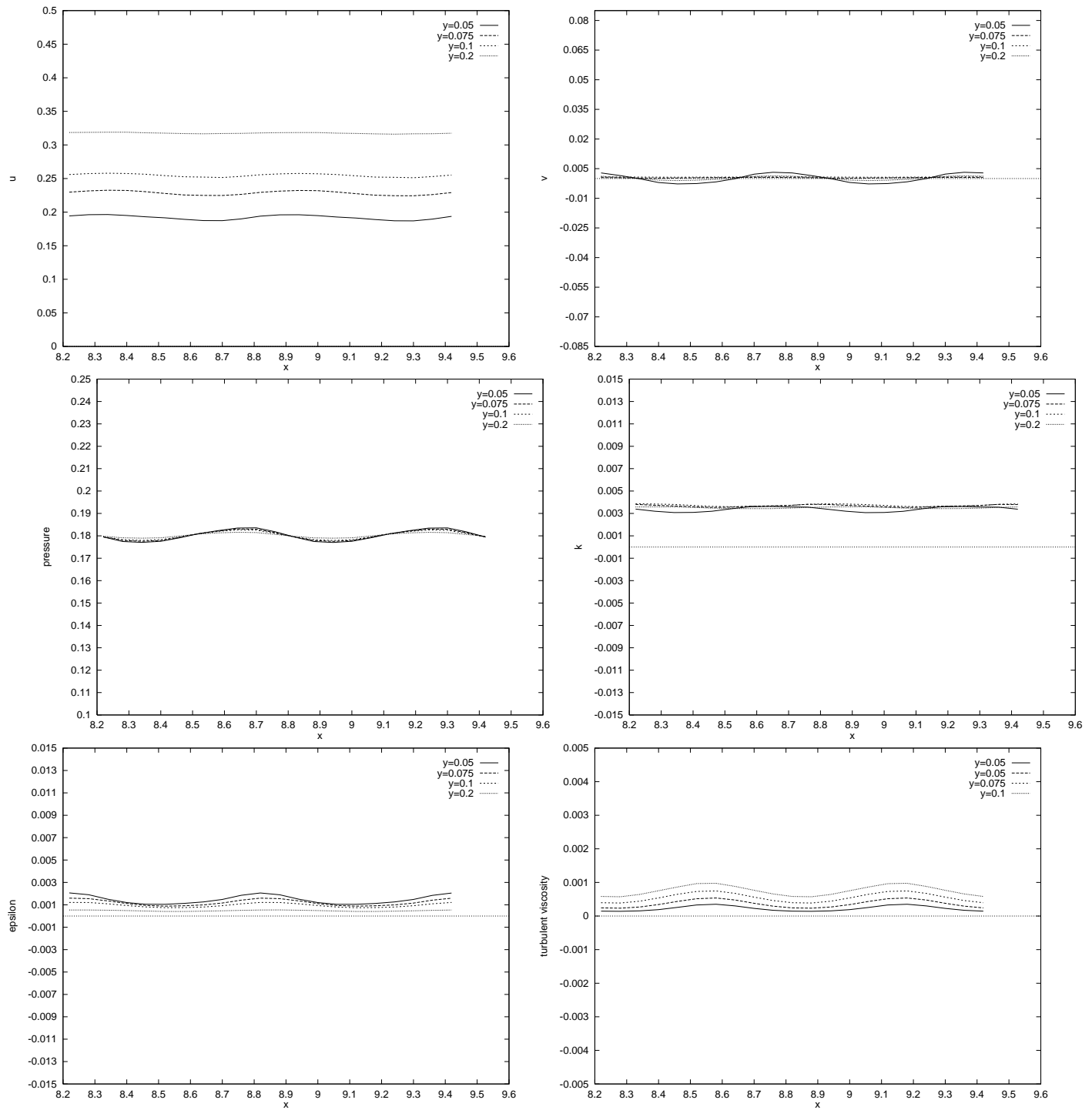


FIG. 47 - Cas 3: profils de  $u_1$ ,  $u_2$ , pression,  $k$ ,  $\epsilon$  et  $\nu_t$  à quatre hauteurs différentes (avec bicouche).





---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399